

(12)

OFICINA ESPAÑOLA DE PATENTES Y MARCAS

ESPAÑA



1 Número de publicación: 2 377 107

51 Int. Cl.:	
G01S 13/90	
G01S 13/32	

(2006.01) (2006.01)

# TRADUCCIÓN DE PATENTE EUROPEA

Т3

- 96 Número de solicitud europea: 09745666 .9
- 96 Fecha de presentación: 04.05.2009

97 Número de publicación de la solicitud: 2286270

97) Fecha de publicación de la solicitud: 23.02.2011

(54) Título: Obtención de imágenes por radar de una es unidimensional o bidimensional	scena en el campo lejano de una red de radares
(30) Prioridad: 15.05.2008 EP 08156238	<ul> <li>Titular/es:</li> <li>The European Union, represented by the European Commission</li> <li>Rue de la Loi, 200</li> <li>1049 Brussels, BE</li> </ul>
<ul> <li>Fecha de publicación de la mención BOPI:</li> <li>22.03.2012</li> </ul>	72 Inventor/es: FORTUNY-GUASCH, Joaquim
<ul> <li>Fecha de la publicación del folleto de la patente: 22.03.2012</li> </ul>	Agente/Representante: Curell Aguilá, Mireia

ES 2 377 107 T3

Aviso: En el plazo de nueve meses a contar desde la fecha de publicación en el Boletín europeo de patentes, de la mención de concesión de la patente europea, cualquier persona podrá oponerse ante la Oficina Europea de Patentes a la patente concedida. La oposición deberá formularse por escrito y estar motivada; sólo se considerará como formulada una vez que se haya realizado el pago de la tasa de oposición (art. 99.1 del Convenio sobre concesión de Patentes Europeas).

### DESCRIPCIÓN

Obtención de imágenes por radar de una escena en el campo lejano de una red de radares unidimensional o bidimensional

#### Campo técnico

5

10

La presente invención se refiere en general a la obtención de imágenes por radar de una escena ubicada en el campo lejano de una apertura de radar, más particularmente a un procedimiento para convertir una imagen de radar a partir de datos de radar sin procesar.

### Antecedentes de la técnica

- La presente invención puede aplicarse para la reconstrucción de imágenes a partir de datos de radar adquiridos por un radar de apertura sintética (SAR) o mediante una red de radares física. SAR es una técnica bastante conocida y bastante desarrollada para producir imágenes de alta resolución [1], [2]. Se utiliza de manera operativa un gran número de algoritmos de obtención de imágenes en diferentes dominios de aplicación civiles y militares [3]. Un requisito común para tales algoritmos es el de producir formación de imágenes con la mayor resolución posible. Se conoce bien que los límites de la resolución en alcance y alcance cruzado se dictan, respectivamente, por el ancho
- 20 de banda de frecuencia y la dimensión física de la apertura de radar. En la práctica, un criterio para evaluar lo óptimo que es un sistema de SAR es comparar la resolución de alcance cruzado lograda en la formación de imágenes con la dimensión física de la antena del radar. Como ejemplo, en un SAR de mapa en forma de banda, la resolución de alcance cruzado no puede ser más fina que una mitad del tamaño de apertura de la antena física. La mayor parte de los algoritmos de obtención de imágenes por radar actualmente en uso se han concebido para sistemas de SAR con
- 25 una longitud de apertura óptima. Hasta la fecha, el interés en los sistemas de obtención imágenes por radar con longitudes de apertura subóptimas ha sido muy limitado. El centro de atención de esta invención está en el problema de implementar un algoritmo de obtención de imágenes rápido y preciso con una longitud de apertura sumamente subóptima, por ejemplo en un sistema de radar que presenta una longitud de apertura de algunos metros y que ilumina una escena de imagen que abarca algunos kilómetros cuadrados ubicados dentro del campo lejano de la
- 30 apertura de radar. Este escenario es bastante diferente de los del SAR espacial y aéreo. En particular, los algoritmos de obtención de imágenes utilizados con longitudes de apertura óptimas (normalmente algunas decenas de kilómetros de largo en el caso de SAR espacial), tal como los algoritmos de migración de alcance y de cambio a escala de chirrido [4], [5], no satisfacen determinados requisitos encontrados con una apertura de radar subóptima. El algoritmo de formato polar o de alcance-Doppler también se ha descartado debido a la distorsión geométrica
- 35 producida por el mismo en la formación de imágenes [6]. Este algoritmo sólo puede utilizarse con extensiones de imágenes mucho más pequeñas que el alcance al centro de la escena y, por tanto, no es apropiado para todos los escenarios de interés. En [26], Averbuch *et al.* dan a conocer un procedimiento para manipular la transformada de Fourier en coordenadas polares, que utiliza una herramienta central, una denominada FFT pseudopolar, en el que las frecuencias de evaluación se basan en un conjunto de sobremuestreo de puntos separados de manera
- 40 equidistante no angularmente. La transformada pseudopolar desempeña el papel de un sistema casi polar desde el cual la conversión a coordenadas polares utiliza procesos que se basan sólo en FFT unidimensional y operaciones de interpolación.
- Un campo de aplicación ejemplo para un radar de obtención de imágenes subóptimo es el de SAR terrestre (GB-SAR), que se utiliza actualmente para monitorizar el desplazamiento de desprendimientos de tierra con precisión submilimétrica [7], [8]. En lo últimos años, el Centro Común de Investigación de la Comisión Europea ha sido pionero de esta tecnología y ha llevado a cabo un enorme número de campañas de campo que han demostrado su utilización operacional [9], [10]. Esta actividad ha dado como resultado un archivo masivo de datos de GB-SAR con más de 300.000 conjuntos de datos sin procesar recogidos de diversos sitios. Normalmente, un sitio monitorizado de
- 50 manera permanente con uno de estos instrumentos de GB-SAR produce un total de 35.000-40.000 conjuntos de datos sin procesar en todo un año. Una motivación de este trabajo procede de la necesidad de tener una cadena de procesamiento de GB-SAR eficaz y precisa de manera computacional para hacer frente a este enorme volumen de datos.

### 55 **Problema técnico**

Un objetivo de la presente invención es proporcionar un procedimiento de obtención de imágenes por radar de una escena, que puede implementarse de una manera computacionalmente eficaz. Este objetivo se alcanza mediante un procedimiento según la reivindicación 1 ó 7.

#### Descripción general de la invención

El procedimiento según la invención presenta dos variantes, dirigidos al caso "bidimensional" ("2D") y al caso "tridimensional" ("3D"), respectivamente. Ambas variantes comprenden el cálculo de una imagen de reflectividad de radar basada en un desarrollo en serie de imágenes. En la primera variante, los datos de radar sin procesar provienen de una red de radares unidimensional, mientras que, en la segunda variante, provienen de una red de

65

radares bidimensional. En ambas variantes del procedimiento, la red de radares puede ser una red de radares de apertura sintética o una red de radares física. En ambas variantes, la escena de interés de la que van a obtenerse imágenes se encuentra en el campo lejano de la red de radares. Esto puede expresarse matemáticamente como:

$$\rho > \frac{2L_x^2}{\lambda_c} \quad y \quad \rho > \frac{2L_y^2}{\lambda_c}, \qquad (1)$$

5

en la que o indica la distancia desde el centro de la red de radares hasta un punto arbitrario dentro de la escena de interés, L<sub>x</sub> la longitud de la red de radares a lo largo de su primer eje y L<sub>y</sub> la longitud de la red de radares a lo largo de su segundo eje (en el caso de una red de radares 2D), y  $\lambda_c$  la longitud de onda central del radar.

- 10 Volviendo a la primera variante, un procedimiento de obtención de imágenes por radar de una escena en el campo lejano de una red de radares unidimensional, comprende proporcionar una serie de datos de retrodispersión D(fm, x'n) de la escena, estando asociados estos datos de retrodispersión a una pluralidad de posiciones x'n, n=0... N-1, N>1, que están separadas de manera regular a lo largo de un eje de la red de radares. Se muestrean los datos de retrodispersión para cada posición de la red de radares x'n en dominio de frecuencia, a frecuencias diferentes fm,
- 15 m=0...M-1, M>1, definidas por  $f_m=f_c-B/2+m-\Delta f$ , en la que  $f_c$  representa la frecuencia central, B el ancho de banda y  $\Delta f$ el paso de frecuencia del muestreo. Según la presente variante de la invención, se calcula una imagen de reflectividad de radar I( $\alpha_{m'}, \beta_{n'}$ ) en un sistema de coordenadas pseudopolares basándose en la fórmula:

$$I(\alpha_{m'}, \beta_{n'}) = \sum_{p=0}^{P_{\max}} I_p(\alpha_{m'}, \beta_{n'}), \qquad (2)$$

20

30

$$I_{p}(\alpha_{m'},\beta_{n'}) = \frac{1}{p!} \left[ \frac{-j2\pi\beta_{n'}}{f_{c}} \right]^{p} FFT2D \left[ D(f_{m},x'_{n})(\hat{f}_{m}x'_{n})^{p} \right],$$
(3)

25 en las que

con

- j representa la unidad imaginaria,

-  $f_m = -B/2 + m \cdot \Delta f$  es la frecuencia de banda base,

- FFT2D indica el operador de transformada rápida de Fourier 2D,
- α<sub>m</sub>, m'=0...M-1, y β<sub>n</sub>, n'=0...N-1 representan una retícula regular en el sistema de coordenadas pseudopolares, y
- 35 -  $P_{max}$  se elige  $\geq 0$  dependiendo de una precisión predefinida que va a lograrse;

o cualquier fórmula matemáticamente equivalente.

Los expertos apreciarán que la presente invención utiliza un desarrollo en serie para aproximar la imagen de 40 reflectividad en un sistema de coordenadas pseudopolares, es decir se calculan los diferentes términos de la serie hasta el orden predefinido Pmax y entonces se resumen estos términos (si Pmax ≥ 1). A continuación se hará referencia al procedimiento en resumen como el algoritmo de formato pseudopolar de campo lejano, abreviado FPFA. En la práctica, una serie de orden 0 puede ser suficiente para obtener una buena aproximación de la reflectividad en la retícula pseudopolar. En este caso, Pmax=0 y por tanto

45

$$I(\alpha_{m'}, \beta_{n'}) \approx FFT2D[D(f_m, x'_n)]$$
(4)

En el caso particular de utilizar sólo el desarrollo en serie de orden 0, el coste computacional del FPFA es O(N M log<sub>2</sub>M), que es el menor valor posible que podría esperarse para tal algoritmo de obtención de imágenes. Como ejemplo, con n=N=M=2048, el FPFA presenta un coste computacional tres órdenes de magnitud menor que el del 50 algoritmo de retropropagación de dominio de tiempo (TDBA), y seis órdenes de magnitud menor que el del algoritmo de retropropagación de dominio de frecuencia (FDBA). Por tanto, el beneficio de utilizar el FPFA es evidente. Se observará que la adición de más términos en el desarrollo en serie, evaluándose todos con transformadas de FFT 2-D, es sencilla y no aumenta el coste computacional de manera significativa. Por tanto, el beneficio de utilizar el FPFA es evidente.

Según una implementación ventajosa del FPFA, los términos individuales de la serie de imágenes se evalúan de simultáneamente y por separado (por ejemplo, utilizando un sistema de múltiples procesadores paralelos).

5 Las posiciones de la red de radares se definen preferiblemente por  $x'_n=-L_x/2+n\cdot\Delta x'$ , en la que  $L_x$  representa una longitud de la red de radares y  $\Delta x'$  la separación entre las posiciones de la red de radares.

El sistema de coordenadas pseudopolares se determina de manera implícita mediante la transformada de Fourier, las posiciones de la red x'<sub>n</sub> y las frecuencias f<sub>m</sub>. Con una elección apropiada del origen del sistema de coordenadas pseudopolares, pueden expresarse los puntos α<sub>m</sub>, m'=0...M-1 y β<sub>n'</sub>, n'=0... N-1, de la retícula regular en el sistema de coordenadas pseudopolares, por ejemplo, por α<sub>m'</sub>=m'/B, m'=0...M-1 y β<sub>n</sub>:-n'/L<sub>x</sub>(N-1)/(2L<sub>x</sub>), n'=0...N-1. Pueden hallarse más detalles en el concepto de retículas pseudopolares en [11] y [12]. Más recientemente, se ha presentado una técnica que implementa una FFT polar 2-D utilizando una retícula pseudopolar en [13] y [14].

- El orden P<sub>max</sub> del desarrollo en serie se elige preferiblemente dependiendo de la razón de la longitud de la red de radares L<sub>x</sub> con respecto a la resolución de alcance. La resolución de alcance δ<sub>r</sub> se proporciona por δ<sub>r</sub>=c/(2B), en la que c indica la velocidad de la luz. Como regla general, cuanto más grande es la razón L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub>, más términos se utilizan preferiblemente en la serie para garantizar la precisión de la imagen de reflectividad. Una observación interesante es que el número de términos no depende de la frecuencia central del radar.
  - Preferiblemente, las etapas de cálculo posteriores que utilizan la imagen de reflectividad se llevan a cabo en el sistema de coordenadas pseudopolares, por ejemplo el cálculo de una imagen de coherencia y/o un interferograma de fase 2D. Más preferiblemente, una transformación de la imagen de reflectividad, la imagen de coherencia y/o el interferograma de fase 2D en un sistema de coordenadas que es más conveniente para visualizar la información, por ejemplo un sistema de coordenadas polares o cartesianas, se lleva a cabo sólo tras los cálculos sustanciales (de la
- ejemplo un sistema de coordenadas polares o cartesianas, se lleva a cabo sólo tras los cálculos sustanciales (de la imagen de reflectividad, la imagen de coherencia y/o el interferograma de fase 2D) en el sistema de coordenadas pseudopolares. De esta manera, los errores introducidos en los datos a través del mapeo de la imagen calculada en una retícula polar o cartesiana mediante interpolación o cualquier otro procedimiento adecuado, sólo afectan a la visualización pero no a los cálculos sustanciales. Una ventaja adicional del presente procedimiento es que, a
- diferencia de los procedimientos de obtención de imágenes por radar anteriores, no se requiere ninguna interpolación computacionalmente costosa antes de cualquier transformada de Fourier. Esto representa una ventaja importante, por ejemplo, sobre el denominado algoritmo de migración de alcance, que utiliza un filtro combinado e interpolación de Stolt para representar los datos de retrodispersión de radar en una retícula regular en dominio de frecuencia especial, antes de transformarse mediante Fourier directamente en una imagen de reflectividad en una retícula regular en un sistema de coordenadas cartesianas.

Volviendo a la segunda variante de la invención, un procedimiento de obtención de imágenes por radar de una escena en el campo lejano de una red de radares bidimensional, comprende proporcionar una serie de datos de retrodispersión D(f<sub>m</sub>, x'<sub>n</sub>, y'<sub>k</sub>) de la escena, estando asociados estos datos de retrodispersión a una pluralidad de posiciones (x'<sub>n</sub>, y'<sub>k</sub>) n=0...N-1, N>1, k=0...K-1, K>1, separadas de manera regular a lo largo de un primer y un segundo eje de la red de radares. Los datos de retrodispersión para cada posición de la red de radares (x'<sub>n</sub>, y'<sub>k</sub>) se muestrean en el dominio de frecuencia, a frecuencias diferentes f<sub>m</sub>, definidas por f<sub>m</sub>=f<sub>c</sub>-B/2+m·Δf, en la que f<sub>c</sub> representa de nuevo la frecuencia central, B el ancho de banda y Δf el paso de frecuencia del muestreo. Se calcula una imagen de reflectividad de radar I(α<sub>m</sub>, β<sub>n</sub>, γ<sub>k</sub>) en un sistema de coordenadas pseudoesféricas según la fórmula:

45

$$I(\alpha_{m'}, \beta_{n'}, \gamma_{k'}) = \sum_{p=0}^{P_{\max}} I_{p}(\alpha_{m'}, \beta_{n'}, \gamma_{k'}), \qquad (5)$$

con

$$I_{p}(\alpha_{m'},\beta_{n'},\gamma_{k'}) = \left[\frac{-j2\pi}{f_{c}}\right]^{p} \sum_{q=0}^{p} \frac{\beta_{m'}^{q} \gamma_{k'}^{p-q}}{q!(p-q)!} FFT3D\left[D(f_{m},x'_{n},y'_{k})\hat{f}_{m}^{p} x'_{n}^{q} y'_{k}^{p-q}\right], \quad (6)$$

50

en las que

- j representa la unidad imaginaria,

55

-  $\mathbf{f}_{m} = -\mathbf{B}/2 + \mathbf{m} \cdot \Delta \mathbf{f}$ ,

- FFT3D indica un operador de transformada rápida de Fourier 3D,

-  $\alpha_{m'}$ , m'=0...M-1,  $\beta_{n'}$ , n'=0...N-1 y  $\gamma_{k'}$ , k=0...K-1, representan una retícula regular en el sistema de coordenadas pseudoesféricas,

5 - y  $P_{max}$  se elige  $\ge$  0 dependiendo de una precisión predefinida que va a lograrse;

o cualquier fórmula matemáticamente equivalente.

Como en la variante anterior, se utiliza un desarrollo en serie para aproximar la imagen de reflectividad. Sin embargo, esta vez la imagen de reflectividad se calcula en un sistema de coordenadas pseudoesféricas. Los diferentes términos de la serie se calculan hasta el orden predefinido P<sub>max</sub> y entonces se resumen estos términos (si P<sub>max</sub> ≥ 1). Se hará referencia al procedimiento como el algoritmo de formato pseudoesférico de campo lejano, también abreviado FPFA puesto que será evidente a partir del contexto si se considera un sistema de coordenadas pseudoesféricas o pseudopolares. En la práctica, una serie de orden 0 puede ser suficiente para obtener una buena aproximación de la reflectividad en la retícula pseudoesférica. En este caso, P<sub>max</sub>=0 y por tanto

$$I_{p}(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\beta}_{n'},\boldsymbol{\gamma}_{k'}) \approx FFT3D[D(f_{m},\boldsymbol{x}_{n'},\boldsymbol{y}_{k'})].$$
<sup>(7)</sup>

Los términos individuales de la serie de imágenes pueden evaluarse de simultáneamente y por separado (por ejemplo utilizando un sistema de múltiples procesadores paralelos).

Las posiciones de la red de radares se definen preferiblemente por x'n=-L<sub>x</sub>/2+n·Δx' a lo largo del primer eje, en la que L<sub>x</sub> representa una longitud de la red de radares a lo largo del primer eje y Δx' la separación entre las posiciones de la red de radares a lo largo del primer eje, y por y'<sub>k</sub>=-L<sub>y</sub>/2+k·Δy' a lo largo del segundo eje, en la que L<sub>y</sub> representa una longitud de la red de radares a lo largo del segundo eje y Δy' la separación entre las posiciones de la lo largo del segundo eje. El sistema de coordenadas pseudoesféricas se determina de manera implícita por la transformada de Fourier 3D, las posiciones de la red de radares (x'n, y'k) y las frecuencias f<sub>m</sub>. Con una elección apropiada del origen del sistema de coordenadas pseudoesféricas, pueden expresarse los puntos α<sub>m</sub>, m'=0... M-1, β<sub>n</sub>, n'=0... N-1, y γ<sub>k</sub>, k'=0... K-1, de la retícula regular en el sistema de coordenadas pseudoesféricas, por ejemplo,

30 por  $\alpha_{m'}=m'/B$ , m'=0...M-1,  $\beta_{n'}=n'/L_x-(N-1)/(2L_x)$ , n=0...N-1, y  $\gamma_{K'}=k'/L_y-(K-1)/(2L_y)$ .

El orden P<sub>max</sub> del desarrollo en serie se elige preferiblemente dependiendo de las razones de las longitudes de la red de radares L<sub>x</sub> y L<sub>y</sub> con respecto a la resolución de alcance: cuanto más grandes son las razones L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub> y L<sub>y</sub>/δ<sub>r</sub>, más términos se utilizan preferiblemente en la serie para garantizar la precisión de la imagen de reflectividad. En cuanto a la variante comentada anteriormente, el número de términos no depende de la frecuencia central del radar.

Preferiblemente, las etapas de cálculo posteriores que utilizan la imagen de reflectividad se llevan a cabo en el sistema de coordenadas pseudoesféricas, por ejemplo el cálculo de una imagen de coherencia y/o un interferograma de fase 3D. Más preferiblemente, una transformación de la imagen de reflectividad, la imagen de coherencia y/o el interferograma de fase 3D en un sistema de coordenadas que es más conveniente para visualizar la información, por

- 40 interferograma de fase 3D en un sistema de coordenadas que es más conveniente para visualizar la información, por ejemplo un sistema de coordenadas esféricas o cartesianas, se lleva cabo sólo tras los cálculos sustanciales (de la imagen de reflectividad, la imagen de coherencia y/o el interferograma de fase 3D) en el sistema de coordenadas pseudoesféricas. De esta manera, los errores introducidos en los datos a través del mapeo de la imagen calculada en una retícula esférica o cartesiana mediante interpolación o cualquier otro procedimiento adecuado, sólo afectan a la visualización pero no a los cálculos sustanciales. No se requiere ninguna interpolación computacionalmente
- costosa antes de cualquier transformada de Fourier.

Ambas variantes de la invención pueden aplicarse para calcular una imagen de reflectividad de radar en o casi en tiempo real.

50

55

60

35

Un aspecto de la invención se refiere a un producto de programa informático para controlar un aparato de procesamiento de datos, por ejemplo un ordenador, un microprocesador, un sistema de múltiples procesadores paralelos, y similares, que comprende instrucciones que hacen que el aparato de procesamiento de datos lleve a cabo el FPGA cuando se ejecuta en el aparato de procesamiento de datos.

### Breve descripción de los dibujos

Detalles y ventajas adicionales de la presente invención se pondrán de manifiesto a partir de la siguiente descripción detallada de formas de realización no limitativas con referencia a los dibujos adjuntos, en los que:

la figura 1 es una vista lateral esquemática de un SAR;

la figura 2 es una vista lateral esquemática de una red de radares física;

la figura 3 es una vista frontal de un SAR 2D;

la figura 4 es una vista frontal esquemática de una red de radares física 2D;

5 la figura 5 es una vista frontal esquemática de una red de radares MIMO 2D;

la figura 6 es una vista esquemática desde arriba de una situación cuando se obtienen imágenes por radar de una escena;

10 la figura 7 es una vista en perspectiva esquemática de una situación cuando se obtienen imágenes de una escena con una red de radares 2D;

la figura 8 muestra una comparación de imágenes, en coordenadas polares, obtenidas con el TBDA y el FPFA de orden 0, respectivamente;

15

la figura 9 es un diagrama que muestra el orden preferido del desarrollo en serie de imágenes como una función de longitud de apertura con respecto a la resolución de alcance.

#### Descripción de realizaciones preferidas

conmuta electrónicamente a través de estas antenas 14, 16.

Puede utilizarse el algoritmo de formato pseudopolar de campo lejano con una red de radares de obtención de imágenes corta que presenta una longitud de red L<sub>x</sub>. Esta red de radares 10, 10' puede ser o bien sintética o física, tal como se muestra en las figuras 1 y 2. La síntesis de apertura puede lograrse a través del movimiento lineal controlado (indicado por la flecha de líneas discontinuas 13) de un único elemento 12 de radar que comprende una antena de transmisión 14 y una antena de recepción 16 (o una única antena tanto para transmisión como para la recepción) conectadas a un transceptor 18 de radar. Alternativamente, puede proporcionarse una apertura de radar físico 10' en la forma de una red de antenas de transmisión/recepción 14, 16 y una unidad 17 de multiplexor que

- 30 Mientras que las figuras 1 y 2 muestran redes de radares unidimensionales, las figuras 3-5 ilustran el caso de una red de radares bidimensional. La figura 3 muestra una red de radares sintética 2D 10 con un único elemento de radar que comprende una antena de transmisión 14 y una antena de recepción 16 (o una única antena tanto para la transmisión como para la recepción). Durante el funcionamiento de la red de radares, el elemento de radar se mueve a lo largo de una trayectoria 19 predefinida y se llevan a cabo mediciones de retrodispersión de radar en una
- 35 pluralidad de posiciones 20, que se distribuyen de manera regular en el área de apertura de modo que se define una retícula regular. Estas posiciones 20 de la red de radares están separadas de manera regular a lo largo de un primer eje ("eje x") y un segundo eje ("eje y"), que son perpendiculares entre sí. Las separaciones en la dirección del primer eje y el segundo eje son ∆x' y ∆y', respectivamente. Los puntos de medición, es decir las posiciones 20 de la red de radares, corresponden a los centros de fase del par de antenas de transmisión/recepción en movimiento.

Una primera alternativa para la red de radares 2D sintética de la figura 3 es la red de radares física 10' de la figura 4. Una pluralidad de elementos de radar que presentan cada uno una antena de transmisión 14 y una de recepción 16 o una única antena tanto para la transmisión como para la recepción, están dispuestos a lo largo de los ejes de la red primero y segundo, con separaciones  $\Delta x' y \Delta y'$ , respectivamente. En una medición con la red de radares de la figura 4, se registra el eco de radar de manera secuencial, utilizando todos los elementos de la red de radares un dispositivo de multiplexor o de computación. Debido al púmero de elementos de radar pormalmente una red de

- 45 figura 4, se registra el eco de radar de manera secuencial, utilizando todos los elementos de la red de radares un dispositivo de multiplexor o de conmutación. Debido al número de elementos de radar, normalmente una red de radares física es más cara que la sintética. Sin embargo, una red de radares física presenta la ventaja de tiempos de adquisición mucho más cortos.
- 50 Una segunda alternativa para la red de radares 2D sintética de la figura 3 es la red de radares MIMO 2D 10" (múltiples entradas múltiples salidas) de la figura 5. Un conjunto de antenas de transmisión S<sub>TX</sub> 14 y un conjunto de antenas de recepción S<sub>RX</sub> 16 están dispuestas de modo que los centros de fase de todas las combinaciones posibles de antenas de transmisión y recepción se distribuyen de manera regular en el área de apertura. Con una red de radares MIMO, se activan de manera secuencial todas las antenas de transmisión 14 y para cada antena de
- 55 recepción en esta secuencia, se registra el eco de radar con algunas o todas las antenas de recepción 16. Por tanto, se presenta un total de mediciones de S<sub>TX</sub>-S<sub>RX</sub> máximas asociadas con los diferentes centros de fase (que, por tanto, son los puntos 20 de medición, es decir las posiciones de la red de radares) en la apertura. Esta configuración de la red se produce a un coste y una complejidad razonables y ofrece tiempos cortos de adquisición.
- 60 A continuación, en primer lugar, se comentará el FPFA para el caso bidimensional con referencia a la figura 6 (que no es a escala).

Se supone que la escena 22 de interés en la que se está interesado está ubicada dentro del campo lejano de la red de radares (que se representa en este caso, para ilustración, como un SAR 10), es decir:

$$\rho, \rho' > \frac{2L_x^2}{\lambda_c} \tag{8}$$

en la que ρ' indica la distancia de alcance desde una posición de la red de radares x = x' hasta un punto arbitrario P dentro de la escena 22. De manera similar, ρ indica la distancia de alcance desde el centro de la apertura de radar
basta el mismo punto P. La técnica de obtención de imágenes propuesta requiere que la escena de imagen esté ubicada en el campo lejano. Sin embargo, siempre que se satisfaga esta condición, la extensión de la escena de imagen (es decir sus anchuras W<sub>x</sub> y W<sub>z</sub> en las direcciones x y z, respectivamente) sólo está limitada por el campo de visión 24 de los elementos de antena individuales. Se espera que la resolución resultante de alcance cruzado sea altamente subóptima. Éste es un punto que distingue el FPFA propuesto del algoritmo de obtención de imágenes de

10 formato polar o de alcance-Doppler [15], [16], que sólo puede utilizarse con extensiones de imagen mucho más pequeñas que el alcance al centro de la escena.

Para introducir la formulación del algoritmo FPFA se supondrá la utilización de un radar de frecuencia escalonada. Obsérvese que esta elección se realiza sin pérdida de generalidad y que la formulación presentada también podría utilizarse con un radar de onda continua (CW) de frecuencia modulada. Por tanto, se considera una señal CW emitida por un elemento 12 de red de radares ubicado en una posición de la red x = x', que presenta una anchura de haz lo suficientemente grande para irradiar el área de imagen entera de interés. La señal de retrodispersión se recibe sustancialmente en la misma posición. Para mayor explicación del algoritmo, se supone que la escena consiste en un único punto dispersado ubicado en un punto P, con coordenadas polares (ρ,θ), tal como se muestra
20 en la figura 2. Las coordenadas del punto referidas a la posición del elemento de radar son (ρ',θ'). La red de radares

adquiere la señal de retrodispersión D(f, x') como una función de dos parámetros: la frecuencia f de la señal CW, y la posición del elemento de radar en la red x'. Se supone que los datos de retrodispersión van a muestrearse de manera uniforme tanto en el dominio de frecuencia como en el dominio de espacio a lo largo del eje de la red. Por tanto, una medición con este radar dará como resultado la siguiente matriz bidimensional de valores complejos D(f<sub>m</sub>, x'<sub>n</sub>) con:

$$f_m = f_c - B/2 + m\Delta f$$
(9)
$$x'_n = -L_x/2 + n\Delta x'$$
(10)

- en las que m= 0,1,..., M-1, n = 0,1, ...,N-1, f<sub>c</sub> es la frecuencia central, B es el ancho de banda de frecuencia barrido en
  la medición, Δf es el paso de frecuencia, M es el número de frecuencias medidas, Δx' es la separación entre las posiciones de la red de radares (es decir la separación entre los elementos de red de radares física en el caso de una red de radares física, los centros de fase de las diferentes combinaciones de antena de transmisión/recepción en el caso de una red de radares MIMO, o el paso de movimiento utilizado en la exploración lineal en el caso de una red sintética) y N es el número puntos de medición a lo largo de la apertura de radar. Como en cualquier algoritmo de obtención de imágenes basado en una transformada de Fourier 2D, los pasos en la posición de frecuencia y de radar tendrán que ser lo suficientemente finos con el fin de evitar ambigüedades tanto en la dirección de alcance
- como de alcance cruzado.
- Puede lograrse la síntesis de una imagen de radar sumando de manera coherente las contribuciones de señal en
   relación con las diferentes posiciones de radar y frecuencias de CW. Esta técnica se conoce como retropropagación de frente de onda de dominio de frecuencia [17]. Por tanto, con la geometría de obtención de imágenes de la figura 6, puede estimarse la reflectividad de radar en el punto P tal como sigue en el caso de una dependencia de tiempo exp(+j 2π f t):

$$I(\rho, \theta) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} D(f_m, x'_n) \exp\left[+j\frac{4\pi f_m}{c}\rho'_n\right]$$
(11)

45

en la que c es la velocidad de la luz y

$$\rho'_{n} = \sqrt{(\rho \sin \theta - x'_{n})^{2} + \rho^{2} \cos^{2} \theta}$$
(12)

50

La síntesis de una imagen de reflectividad entera utilizando la ecuación (11) ha asociado un alto coste computacional, que es O(MNM'N'), en la que M' y N' indican el número de píxeles en las direcciones x y z, respectivamente. El algoritmo de la ecuación (5) se conoce como el algoritmo de retropropagación de dominio de

frecuencia (FDBA). El algoritmo de retropropagación también puede formularse en el dominio de tiempo. El coste computacional asociado de este algoritmo es O(N N' M log<sub>2</sub>M), que es significativamente menor que el de su implementación de dominio de frecuencia. En la práctica, la implementación de dominio de tiempo es la que se utiliza más comúnmente con longitudes de apertura altamente subóptimas. La formulación del algoritmo de retropropagación de dominio de tiempo (TDBA) puede escribirse como:

$$I(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} D_t (t = \frac{2\rho'_n}{c}, x'_n)$$
(13)

en la que D<sub>t</sub>(t, x') indica la transformada de Fourier de frecuencia con respecto al tiempo de los datos de
 retrodispersión de dominio de frecuencia D(f, x). El TDBA ha asociado una interpolación 1D antes de la compresión azimutal. Normalmente, se utilizan una FFT con rellenado con ceros (para aumentar sustancialmente la frecuencia de muestreo en el dominio de tiempo) y una interpolación de Lagrange [18]. Más tarde se considerará la formación de imágenes resultantes obtenidas con el TDBA en la ecuación (13) como referencia para evaluar la calidad de la formación de imágenes por FPFA.

15

5

Puesto que el punto P está en el campo lejano de la apertura de radar, puede aproximarse la distancia de alcance p' utilizando el desarrollo binomial tal como sigue:

$$\rho' \approx \rho - x' \operatorname{sen}\theta + \frac{x'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2\rho} + \frac{x'^3 \operatorname{sen}\theta \cos^2 \theta}{2\rho^2} + \dots$$
(14)

20

25

cuyos términos de orden superior se vuelven menos significativos siempre que  $\rho$ ,  $\rho$ >>L<sub>x</sub>. En este punto, se utilizará la aproximación de campo lejano de primer orden de un radiador dipolar, que es bastante conocida en mediciones de antena [19]:

$$\rho' \approx \rho - x' \operatorname{sen} \theta$$
 (15)

Por tanto, la reflectividad de radar en el punto P en la ecuación (11) puede escribirse ahora como:

es el término de frecuencia de banda base, puede escribirse de nuevo como:

$$I(\rho,\theta) \approx \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} D(f_m, x'_n) \exp\left[+j \frac{4\pi f_m}{c} (\rho - x' \mathbf{sen}\theta)\right]$$
(16)

30

que, considerando que

$$f_m = f_c + \hat{f}_m \tag{17}$$

35 en la que

$$\hat{f}_m = -B/2 + m\Delta f \tag{18}$$

40

$$I(\rho,\theta) \approx \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} D(f_m, x'_n) \exp\left[+j2\pi \left(f_m \frac{2\rho}{c} - x' \frac{2\operatorname{sen} \theta}{\lambda_c}\right)\right] \exp\left[+j2\pi x'_n \hat{f}_m \frac{2\operatorname{sen} \theta}{c}\right] (19)$$

en la que el primer exponencial es el núcleo de una transformada de Fourier 2D. Al examinar el comportamiento del segundo exponencial, se hallan los límites:

$$\left|\Psi_{mn}\right| = \left|2\pi x_{m}^{*} \hat{f}_{m} \frac{2\operatorname{sen} \theta}{c}\right| \le \frac{\pi L \operatorname{sen} \theta}{2\delta_{r}}$$
(20)

en la que  $\delta_r = c/(2B)$  indica la resolución de alcance. Los valores máximos de  $|x'_n| y |f_m|$  utilizados en la ecuación (20) son L/2 y B/2, respectivamente. Debido a la presencia del factor sen  $\theta$  y al hecho de que los valores de medios

 $< x'_n > y < f_m >$  son ambos nulos, los límites eficaces de  $\psi_{mn}$  son en la práctica mucho más pequeños que los facilitados en la ecuación (20). Un desarrollo de Taylor del último exponencial en la ecuación (19) produce:

$$\exp\left[-j\Psi_{mn}\right] \approx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[\frac{-j 4\pi x'_n \hat{f}_m \sin\theta}{c}\right]^p$$
(21)

10

5

Puesto que  $\psi_{mn}$  es un término de modulación de fase independiente de alcance, puede predecirse que cualquier error de truncamiento en el desarrollo anterior dará como resultado un efecto de enfoque de imágenes borrosas independiente de alcance que aumenta con  $\theta$  creciente. No se observa ningún efecto de enfoque de imágenes borrosas en  $\theta = 0$ . Para reformular la ecuación (19) con FFT 2D, se utiliza el sistema de coordenadas pseudopolares determinado por el núcleo de la transformada de Fourier 2D en la ecuación (19). El sistema de coordenadas pseudopolares se define con las dos variables:

$$\alpha = \frac{2\rho}{c}$$
  
$$\beta = \frac{2\sin\theta}{\lambda_c}$$
(22)

15

20

que se parece claramente a un sistema de coordenadas polares con  $\rho$  y  $\theta$  como la variable radial y angular, respectivamente. La coordenada  $\alpha$  es directamente proporcional a la coordenada de alcance de una retícula polar. La coordenada  $\beta$  es una función sinusoidal del ángulo polar  $\theta$  con amplitud  $2/\lambda_c$ . Para un campo estrecho de visión del radar (es decir si  $\theta$ <<1), entonces  $\beta \approx 2\theta/\lambda_c$  y también se vuelve proporcional a la coordenada polar  $\theta$ . La transformación inversa a partir del sistema de coordenadas pseudopolares a las polares es sencilla y puede formularse tal como sigue:

$$\rho = \frac{c}{2}\alpha$$

$$\theta = \arcsin\left[\frac{\lambda_c}{2}\beta\right]$$
(23)

25

y las coordenadas de alcance cruzado y de alcance de tierra correspondientes en la retícula cartesiana son, respectivamente:

$$x = \rho \sin \theta$$
$$y = \rho \cos \theta$$

. .

30

Un ejemplo de retícula 2D uniformemente muestreada en  $\alpha$  y  $\beta$  ( $\lambda_c = 5$  cm) con las retículas cartesiana y pseudopolar correspondientes se muestra en la figura 7. Tal como puede observarse, la retícula uniforme en el sistema de coordenadas pseudopolares se parece bastante a una retícula polar. Sin embargo, una ventaja importante del formato pseudopolar sugerido es que las imágenes resultantes mostrarán una resolución invariable dentro de la escena de imagen entera. Estas resoluciones son  $\delta_{\alpha}=1/B$  y  $\delta_{\beta}=1/L_x$ , respectivamente. La resolución

(24)

- 35 dentro de la escena de imagen entera. Estas resoluciones son δ<sub>a</sub>=1/B y δ<sub>β</sub>=1/L<sub>x</sub>, respectivamente. La resolución invariable no se proporciona en una imagen con formato polar, en la que la resolución azimutal es una función decreciente de θ, excepto cuando la imagen se muestrea de nuevo mediante interpolación apropiada al precio introducir errores de interpolación. Por consiguiente, es una buena práctica utilizar el formato pseudopolar en todas las fases de la cadena de procesamiento excepto en la última en la que la imagen tiene que localizarse que ométricamente v/o visualizarse en un sistema de coordenadas más conveniente para su visualización. Los
- 40 geométricamente y/o visualizarse en un sistema de coordenadas más conveniente para su visualización. Los productos tales como la imagen de reflectividad de radar, imágenes de coherencia, e interferogramas de fase 2D también pueden calcularse en el formato pseudopolar.

Con respecto a la transformación a partir de las retículas o bien pseudopolares o bien polares o bien cartesianas, por ejemplo puede implementarse utilizando cualquier técnica adecuada, por ejemplo una interpolación de Lagrange 2D [20]. Tales transformaciones son bastante conocidas y no es necesario explicarlas. Los detalles con respecto a su implementación pueden hallarse en la bibliografía relevante (véase por ejemplo [21]).

5

Utilizando los resultados anteriores, la reflectividad de radar en el punto P de la ecuación (19) expresada en el sistema de coordenadas pseudopolares se hace:

$$I(\alpha,\beta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[ \frac{-j2\pi\beta}{f_c} \right]^p \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} D(f_m, x'_n) (\hat{f}_m x'_n)^p \times \exp[+j2\pi (f_m \alpha - x'_n \beta)]$$
(25)

10

Para simplificar la notación, se introduce el siguiente par de transformada de Fourier 2D:

$$H_{p}(\alpha_{m'},\beta_{n'}) \Leftrightarrow D(f_{m},x'_{n})(\hat{f}_{m}x'_{n})^{p}$$
<sup>(26)</sup>

en la que el símbolo  $\leftrightarrow$  indica el operador de FFT 2D, con m, m'=0,...,M-1, y n, n'=0,...,N-1. Finalmente, la imagen de reflectividad puede expresarse como un desarrollo en serie de la función H<sub>p</sub>( $\alpha_{m'}$ ,  $\beta_{n'}$ ) tal como sigue:

$$I(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\beta}_{n'}) = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\beta}_{n'})$$
(27)

20 con

$$I_{p}(\alpha_{m'},\beta_{n'}) = \frac{1}{p!} \left[ \frac{-j2\pi\beta_{n'}}{f_{c}} \right]^{p} H_{p}(\alpha_{m'},\beta_{n'}).$$
(28)

En la práctica, puede resumirse sólo un número limitado de términos (P<sub>max</sub>+1), lo que produce las ecuaciones (2) y
 (3). Cuando la apertura de radar presenta una dimensión comparable con la resolución de alcance (es decir L<sub>x</sub>≈δ<sub>r</sub>), que es un escenario bastante común, es suficiente un desarrollo en serie de orden 0 en la ecuación (27) (es decir P<sub>max</sub>=0 en la ecuación (2)), y puede obtenerse una estimación excelente de la reflectividad de imagen en la retícula pseudopolar a través de una única FFT 2D, que produce la ecuación (4):

$$I(\alpha_{m'},\beta_{n'}) \approx I_0(\alpha_{m'},\beta_{n'}) = H_0(\alpha_{m'},\beta_{n'}) = FFT2D[D(f_m,x'_n)]$$

La adición de más términos en el desarrollo en serie, evaluándose todos ellos con FFT 2D, es sencilla y no aumenta significativamente el coste computacional. Además, es perfectamente posible una evaluación separada y simultánea de cada uno de los términos de la serie de imágenes (por ejemplo utilizando sistemas de múltiples procesadores paralelos). La regla es que cuanto mayor es la razón L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub>, más términos deben utilizarse en la serie para garantizar la convergencia del desarrollo en serie de FPFA. El diagrama de la figura 9 indica el orden punto de corte preferido P<sub>max</sub> del desarrollo en serie cuando la imagen va a evaluarse numéricamente, como una función de la razón de la longitud de apertura con respecto a la resolución de alcance L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub>. P<sub>max</sub> puede determinarse por ejemplo utilizando la figura 9, una tabla de búsqueda (que contiene los valores de la figura 9) o evaluando una función de ajuste (por ejemplo f(x) =0,0318x<sup>2</sup>+2,554x+5,3251, en la que x significa en este caso L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub>) y redondeando al alza o a la baja hasta el siguiente entero.

Para mayor completitud, se proporciona una forma alternativa a la ecuación (27) que se obtiene explotando la propiedad derivada de la transformada de Fourier [22]:

45

$$I(\alpha_{m'},\beta_{n'}) \approx \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{-j\beta_{n'}}{2\pi f_c} \right]^p \frac{\partial^p}{\partial^p \beta_{n'}} \sum_{k=0}^p {p \choose k} (-f_c)^k \frac{\partial^{p-k} I_0(\alpha_{m'},\beta_{n'})}{\partial^{p-k} \alpha_{m'}}$$
(29)

que no se utiliza en la práctica, pero que es útil para ilustrar el hecho de que los términos en serie  $I_p(\alpha_{m'},\beta_{n'})$  con p ≥ 1 son derivadas parciales del primer término (es decir el término de orden 0) del desarrollo en serie. Con la condición de tener una resolución de alcance comparable con la longitud de apertura, estos términos adicionales muestran en general reflectividades mucho menores que los del término de orden 0 (normalmente 30-40 dB por debajo) y por tanto no introducen ningún artefacto perceptible en la formación de imágenes. Sin embargo, si la razón de la longitud

5 de apertura con respecto a la resolución de alcance L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub> es grande, pueden ser necesarios términos adicionales en la serie para obtener una estimación más precisa de la imagen de reflectividad.

La derivación anterior del FPFA para una red de radares lineal puede aplicarse por analogía para el caso de una red 10 de radares 2D. En la figura 7 se muestra un croquis del escenario de obtención de imágenes. La red de radares se encuentra en el plano xy y presenta las longitudes Lx y Ly en la dirección x y la dirección y, respectivamente. Los puntos 20 de medición (posiciones de la red de radares) se indican mediante los círculos en la apertura de radar 10. Los separaciones de los puntos de medición a lo largo de los ejes x e y son  $\Delta x'$  y  $\Delta y'$ , respectivamente. En cada punto 20 de medición, se muestrean datos de retrodispersión en el dominio de frecuencia con una separación de

15 complejo D(f<sub>m</sub>, x'<sub>n</sub>, y'<sub>k</sub>) con:

$$f_{m} = f_{c} - B/2 + m\Delta f$$

$$x'_{n} = -L_{x}/2 + n\Delta x'$$

$$y'_{k} = -L_{y}/2 + n\Delta y'$$
(30)

- en la que m = 0,1,.., M-1, n = 0,1, .., N-1, k = 0, 1,... K-1, f<sub>c</sub> es la frecuencia central, B es el ancho de banda de 20 frecuencia barrido en la medición, M es el número de frecuencias medidas, y N y K son el número de posiciones de la red de radares en las direcciones x e y, respectivamente. Como en cualquier algoritmo de obtención de imágenes basado en una transformada de Fourier 3D, los pasos en el dominio de frecuencia y los dos ejes de radares tienen que ser lo suficientemente finos para evitar ambigüedades en las direcciones de alcance y alcance cruzado.
- 25

Suponiendo que se tiene una escena de imagen 3D completamente en el campo lejano de la red de radares 2D (es decir p>>2L<sub>x</sub><sup>2</sup>/ $\lambda_c$  y p>>2L<sub>y</sub><sup>2</sup>/ $\lambda_c$ ), la imagen de reflectividad 3D en el sistema de coordenadas pseudoesféricas puede expresarse como:

$$I(\alpha_{m'},\beta_{n'},\gamma_{k'}) = \sum_{p=0}^{P_{\max}} \left[ \frac{-j2\pi}{f_c} \right]^p \sum_{q=0}^p \frac{\beta_{m'}^q \gamma_{k'}^{p-q}}{q!(p-q)!} FFT3D \left[ D(f_m,x'_n,y'_k) \hat{f}_m^p x_n'^q y_k'^{p-q} \right], \quad (31)$$

30

en la que  $f_m = f_m - f_c$  es la frecuencia de muestreo de banda base.

En lugar de un sistema de coordenadas pseudopolares se presenta en este caso un sistema de coordenadas 35 pseudoesféricas, con variables definidas como

$$\alpha = \frac{2\rho}{c}$$
  

$$\beta = \frac{2x}{\lambda_c \rho}$$
  

$$\gamma = \frac{2y}{\lambda_c \rho}$$
(32)

Se da formato a cada término del desarrollo en serie de imágenes en la ecuación (31) en una retícula uniforme 3D a 40 lo largo de las coordenadas α, β y γ. Puede lograrse la transformación a partir de este sistema de coordenadas a un sistema de coordenadas cartesianas o esféricas utilizando las siguientes expresiones:



En lo que refiere al orden de punto de corte preferido P<sub>max</sub> del desarrollo en serie en la ecuación (31), puede determinarse de manera similar a como se describió con respecto al caso 2D. P<sub>max</sub> depende de las razones de la longitud de apertura con respecto a la resolución de alcance L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub> y L<sub>y</sub>/δ<sub>r</sub>. El valor preferido de P<sub>max</sub> puede determinarse seleccionando el mayor de L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub> y L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub> y utilizando, por ejemplo la figura 9 o una tabla de búsqueda (que contiene los valores de la figura 9), o evaluando una función de ajuste (por ejemplo f(x)=0,0318x<sup>2</sup>+2,554x+5,3251, en la que x significa en este caso el mayor de L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub> y L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub>) y redondeando al alza o a la baja hasta el siguiente número entero.

#### 10 Ejemplos

### A. Simulaciones numéricas

- Se ha validado el FPFA con una serie de escenarios simulados de manera numérica (en el caso 2D). Como primer ejemplo, se generó una escena que consiste en dispersadores de puntos en 5 x 5 distribuidos de manera uniforme en alcance y azimut, con 500 m < ρ < 1500 m y 60 grados < θ < 60 grados. La distancia de alcance al centro de la escena se estableció a 1 km. La separación de dispersador en alcance y azimut son 250 m y 30 grados, respectivamente. Se supuso que la frecuencia central del radar era de 17,05 GHz (es decir en la banda Ku) y que el ancho de banda era de 100 MHz. Se supuso que la apertura de radar era de 2 m de largo (L<sub>x</sub>=2 m). La razón de la
- longitud de apertura con respecto a la resolución de alcance es  $L_x/\delta_r \approx 1,3$ . Antes de la formación de las imágenes, se aplicó una ventana de Blackman-Harris de cuatro términos tanto a lo largo de la frecuencia como de la coordenada lineal de las dimensiones de apertura del radar [23]. Las imágenes de reflectividades se calcularon utilizando el FPFA y, para comparación, el TDBA. En el FPFA, los primeros cuatro términos de la serie de imágenes
- en la ecuación (27), es decir, l<sub>p</sub>(α, β) con 0 ≤ p ≤ 3. El margen dinámico de las imágenes fue de 100 dB. A partir de estos resultados, se deduce claramente que el primer término de la serie de imágenes, el desarrollo de orden 0, ya es una aproximación excelente de la reflectividad verdadera. De hecho, se halló que el segundo término en la serie presenta valores de reflectividad, píxel por píxel, al menos 25 dB por debajo del primer término. De manera similar, el tercer término mostró valores al menos 41 dB por debajo del primer término, lo que indica que puede obtenerse una formación de imágenes excelente utilizando el desarrollo en serie de orden 0. Comparando estos resultados con
- 30 una formación de imágenes excelente utilizando el desarrollo en serie de orden 0. Comparando estos resultados con los del TDBA se confirmó de nuevo que el error de truncamiento es insignificante, y que la imagen de FPFA de orden 0 es extremadamente próxima a la del TDBA.
- En un segundo escenario simulado se supuso que el radar presentaba un ancho de banda mucho mayor, en este caso B = 1 GHz. Se eligió la frecuencia central del radar en 5,5 GHz (es decir en la banda C). La longitud de apertura se estableció a 3 m. Este radar presenta un ancho de banda relativo del 20%, por tanto es totalmente clasificable como banda ultraancha según la US FCC. [24]. Se supuso que la escena de imagen en este momento consistía en siete dispersadores de punto distribuidos uniformemente en azimut dentro de -45 grados <  $\theta$  < 45 grados. La distancia angular entre los dispersadores es de 15 grados y a todos se les dio la misma reflectividad. La
- 40 distancia de alcance a los dispersadores se fijó a 600 m para todos. Como en la simulación previa, se utilizó una ventana de Blackman-Harris de cuatro términos tanto en los dominios apertura de radar como de frecuencia. En este ejemplo, la razón de la longitud de apertura con respecto a la resolución de alcance es exactamente L<sub>x</sub>/δ<sub>r</sub> = 20. Se esperaba que tuviera que utilizarse un número mayor de términos en el desarrollo en serie de imágenes de la ecuación (27) para garantizar la convergencia de la serie. Se calculó la imagen de reflectividad por FPFA para un
- 45 número de términos que oscilaba desde 1 (P<sub>max</sub>=0, desarrollo de orden 0) hasta 65 (P<sub>max</sub>=64). Pudo observarse que la serie alterna de la ecuación (21) converge rápidamente a una imagen de reflectividad muy precisa cuando el orden del desarrollo está por encima de P<sub>max</sub>≈50. Con valores más pequeños de P<sub>max</sub> (P<sub>max</sub> ≤ 48), se observaron algunos artefactos ubicados en grandes ángulos fuera del campo de visión pero estos artefactos desaparecieron cuando el número de términos P<sub>max</sub> se aumento adicionalmente. Se observó que la serie de imágenes de orden 0
- 50 proporciona un resultado razonablemente bueno. Se encontró que imágenes obtenidas con P<sub>max</sub>≥57 están en concordancia casi perfecta con las obtenidas con el TDBA.

### B. Mediciones de GB-SAR

30

Se recogió un primer conjunto de datos de GB-SAR (SAR con base en tierra) en el marco de una campaña de 5 campo en el sitio de pruebas de avalanchas del Swiss Federal Institute for Snow and Avalanche Research (SLF-Davos), ubicado en Vallee de la Sionne (Suiza) [10]. Se implementó un instrumento de LISA (SAR lineal) de JRC para monitorizar la actividad de la avalancha y evaluar la posible utilización operacional de la tecnología de GB-SAR. La frecuencia central utilizada fue de 5,83 GHz, en la banda C, con un ancho de banda de frecuencia de 60 MHz. El radar se basó en un analizador de red de PNA de Agilent Technologies que trabaja en el modo de frecuencia por pasos. El radar presentaba dos antenas de transmisión y recepción separadas y midió la polarización VV. La 10 longitud de apertura del radar sintético fue de 3,5 m. La longitud de la travectoria de avalancha típica en este sitio es de 2,5 km, partiendo de una altitud de aproximadamente 2650 m por encima del nivel del mar y terminando a aproximadamente 1450 m. El instrumento de LISA se situó en el otro sitio del valle a una altitud de 1800 m. La pendiente promedio dentro de la escena de imagen fue de aproximadamente 27 grados. La distancia de alcance 15 hasta la escena de imagen fue desde 700 hasta 2100 m. La amplitud de la escena de imagen en ángulo azimutal fue de 90 grados. La razón de la longitud de apertura con respecto a la resolución de alcance en este caso fue de L₄/δ<sub>r</sub> ≈

1,4, lo que indicó que un desarrollo de orden 0 de la serie de imágenes sería suficiente para obtener una precisión adecuada. El número de puntos de frecuencia y las posiciones de radar a lo largo de la apertura fijados para garantizar una escena de imagen libre de cualquier ambigüedad son, respectivamente, M=1601 y N=251. En esta campaña, el tiempo de medición total necesario para una única adquisición de imagen fue de 9 minutos. Los datos

de retrodispersión se convirtieron en imágenes de reflectividad utilizando el FPFA y, para comparación, el TBDA. Se utilizó una ventana de Blackman-Harris de cuatro términos tanto en los dominios de apertura de frecuencia como de radar. La figura 8 muestra la imagen que resulta del TBDA (lado izquierdo) y del FPFA de orden 0 (lado derecho) en coordenadas polares. Tal como puede observarse, la imagen obtenida con el FPFA de orden 0 puede distinguirse de la que se obtuvo utilizando el TBDA. También se ha evaluado el segundo término de la serie de imágenes. Se encontró que presenta, píxel por píxel, una reflectividad de al menos 39 dB por encima de la del primer término.

Se llevó a cabo una segunda campaña de campo con un instrumento de GB-SAR implementado en una estación de esquí ubicada en Alagna Valsesia (Italia, región de Piedmont). El área monitorizada fue una pendiente muy pronunciada con de 30 a 50 grados de inclinación, a una altitud que oscilaba desde 2300 hasta 2700 m. La parte inferior de la escena de imagen correspondía a Olen Valley, por el que atraviesa una pista de esquí poniendo en riesgo a los esquiadores cuando se producen avalanchas de nieve. El objetivo de esta campaña fue detectar automáticamente cualquier evento de avalancha que se produzca dentro del campo de visión del instrumento de GB-SAR. La extensión de la escena de imagen fue de aproximadamente un kilómetro cuadrado, y se ubicó a

- distancias de alcance que oscilaban desde 750 hasta 1500 m de una red de radares. El radar utilizado se basó de nuevo en un analizador de red de PNA de Agilent Technologies que trabaja en el modo de frecuencia por pasos. El ancho de banda de radar utilizado en esta campaña de campo fue de 250 MHz, con una frecuencia central de 13,25 GHz (es decir en la banda Ku). El radar presentaba dos antenas de recepción y transmisión separadas y midió la polarización VV. La longitud de la apertura fue de 1,9 m. La razón de la longitud de apertura con respecto a la
- 40 resolución de alcance es en este caso L<sub>x</sub>/β<sub>r</sub>~ 3,1, que es mayor que la del ejemplo anterior. El número de puntos de frecuencia y posiciones de radar a lo largo de la apertura son, respectivamente, M=3201 y N=301. En esta campaña, el tiempo de medición total necesario para una única adquisición de imagen fue de 6 minutos. Se observó de nuevo que el FPFA de orden 0 proporcionó básicamente la misma imagen de reflectividad que el TBDA. Esto se debió a que desde el segundo término en delante, las imágenes de FPFA en la serie mostraron una reflectividad muy baja.
- 45 Píxel por píxel, el segundo término en la serie de imágenes mostró reflectividades de al menos 28 dB por debajo de las del primer término. Este valor es más pequeño que en el ejemplo anterior, tal como se esperaba debido a la mayor razón de la longitud de apertura con respecto a la resolución de alcance.

Merece la pena observar que las imágenes de FPFA calculadas en formato pseudopolar o pseudoesférico pueden interpolarse en un modelo digital del terreno (DTM) del área de imagen de interés. Por ejemplo, pueden combinarse dos imágenes recogidas inmediatamente antes y después de un evento (por ejemplo una avalancha) en el formato pseudopolar o pseudoesférico en una imagen de coherencia, que después puede interpolarse en un DTM con textura (por ejemplo una ortofotografía) utilizando la transformación de coordenadas proporcionada en las ecuaciones (23) y (24). Una imagen de coherencia de este tipo permite identificar fácilmente los cambios producidos por el evento (por ejemplo la extensión de una avalancha) debido a los bajos valores de coherencia en el/las área(s) afectada(s).

Con respecto a la utilización práctica de la técnica de la presente invención, el FPFA puede implementarse utilizando cualquier software o hardware adecuado. Hasta el momento, el inventor lo ha implementado y probado utilizando varios paquetes de software comerciales incluyendo Matlab<sup>™</sup> (The Mathworks, MA, EE.UU.), LabView<sup>™</sup> (National Instruments, TX, EE.UU.), e IDL<sup>™</sup> (ITT Visual Soluciones, Boulder, CO, EE.UU.), dando todos excelentes resultados. Es de particular interés la combinación de estas implementaciones y la biblioteca de FFTW (es decir el paquete de software "Fastest Fourier transform in the west" desarrollado en MIT por Frigo y Johnson) [25]. Durante las pruebas con cantidades masivas de imágenes se concluyó que las operaciones de lectura (datos sin procesar) y escritura de disco (imagen por radar) consumían más tiempo que el propio FPFA. Se encontró que los tiempos de

procesamiento típicos para una única imagen (excluyendo las operaciones de lectura y escritura) eran del orden de algunas decenas de ms en una estación de trabajo de Intel Xeon™ 5160-3 GHz.

#### Listado de referencias

[1] C. Elachi, Introduction to the Physics and Techniques of Remote Sensing. Nueva York, EE.UU.: John Wiley and Sons, 1987.

[2] J. C. Curlander and R. N. McDonough, Synthetic Aperture Radar: Systems and Signal Processing. Nueva York,EE.UU.: John Wiley and Sons, 1992.

[3] F. M. Henderson and A. J. Lewis, eds., Principles And Applications of Imaging Radar, vol. 2 of Manual of Remote Sensing. John Wiley and Sons, Nueva York, 3<sup>a</sup> ed., 1998. Published in cooperation with the American Society of Photogrammetry and Remote Sensing.

15

5

[4] W G. Carrara, R. S. Goodman, and R. M. Majewski, Spotlight Synthetic Aperture Radar: Signal Processing Algorithms. Norwood (MA), EE.UU.: Artech House, 1995.

[5] R. Bamler, "A comparison of range-Doppler and wavenumber domain SAR focusing algorithms", IEEE Trans, on 20 Geoscience and Remote Sensing, vol. 30, págs. 706-713, julio de 1992.

[6] D. R. Wehner, High Resolution Radar. Norwood (MA), EE.UU.: Artech House, 2<sup>a</sup> ed., 1994.

[7] D. Leva, G. Nico, D. Tarchi, J. Fortuny-Guasch, and A. J. Sieber, "Temporal analysis of a landslide by means of a ground-based SAR interferometer", IEEE Trans, on Geoscience and Remote Sensing, vol. 41, págs. 745-752, abril de 2003.

[8] D. Tarchi, N. Casagli, S. Moretti, D. Leva, and A. J. Sieber, "Monitoring landslide displacements by using groundbased synthetic aperture radar interferometry: Application to the Ruinon landslide in the Italian Alps", AGU Journal of Geophysical Research: Solid Earth, vol. 108, n.º 8, 2003.

[9] G. Antonello, N. Casagli, P. Farina, D. Leva, G. Nico, A. J. Sieber, and D. Tarchi, "Ground-based SAR interferometry for monitoring mass movements", Landslides, Journal of the International Consortium on Landslides, Springer, vol. 1, n.º 1, págs. 21-28, 2004.

35

45

55

30

[10] A. Martinez-Vazquez, J. Fortuny-Guasch, and U. Gruber, "Monitoring of the snow cover with a ground-based synthetic aperture radar", European Association of Remote Sensing Laboratories - EARSeL eProceedings, vol. 4, n.º 2, págs. 171-178, 2005.

40 [11] R. M. Mersereau and A. V. Oppenheim, "Digital reconstruction of multidimensional signal from their projections," Proceedings of the IEEE, vol. 62, págs. 1319-1338, octubre de 1974.

[12] H. Choi and D. C. Munson, Jr., "Direct-Fourier reconstruction in tomography and synthetic aperture radar", International Journal of Imaging Systems and Technologies, vol. 9, págs. 1-13, enero de 1998.

- [13] A. Averbuch, R. R. Coifman, D. L. Donoho, M. Israeli, and Y. Shkolnisky, "A framework for discrete integral transformations I-the pseudopolar Fourier transform", SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 30, n.º 2, págs. 764-784, 2008.
- 50 [14] Y. S. Y. Keller and A. Averbuch, "Volume registration using the 3-D pseudopolar Fourier transform", IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 54, págs. 4323-4331, noviembre de 2006.

[15] J. L. Walker, "Range-Doppler imaging of rotating objects", IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, vol. 16, págs. 23-52, enero de 1980.

[16] D. L. Mensa, High Resolution Radar Cross Section Imaging. Norwood (MA), EE.UU.: Artech House, 2<sup>a</sup> ed., 1991.

[17] M. Soumekh, Synthetic Aperture Radar Signal Processing with MATLAB Algorithms. Nueva York, EE.UU.: JohnWiley and Sons, 1999.

[18] J. M. Lopez-Sanchez and J. Fortuny, "3-D Radar imaging using range migration techniques", IEEE Trans. On Antennas and Propagation, vol. 48, págs. 728-737, mayo de 2000.

65 [19] C. A. Balanis, Antenna Theory. Nueva York, EE.UU.: John Wiley and Sons, 1982.

[20] R. W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers. Nueva York: Dover Publications, 2<sup>a</sup> ed., 1973.

[21] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions. Nueva York, EE.UU.: Dover Publications Inc., 1970.

[22] R. N. Bracewell, The Fourier Transform and its Applications. Nueva York, EE.UU.: McGraw Hill, 1986.

[23] F. J. Harris, "On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform", Proceedings of the IEEE, vol. 66, págs. 172-204, enero de 1978.

10

5

[24] US Federal Communications Commission, Report FCC 02-48A1 - Revision of Pan 15 of the Commission's Rules Regarding Ultra-Wideband Transmission Systems, febrero de 2002.

[25] M. Frigo and S. G. Johnson, "The design and implementation of FFTW3", Proceedings of the IEEE, vol. 93, n.º 2,
 págs. 216-231, 2005. special issue on "Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation".

[26] A. Averbuch, R.R. Coiffman, D.L. Donoho, M. Elad and M. Israeli, "Fast and Accurate Polar Fourier Transform," Appl. Comput. Harm. Anal. 21 (2006) 145-167.

### REIVINDICACIONES

1. Procedimiento de obtención de imágenes por radar de una escena en el campo lejano de una red de radares unidimensional, que comprende

proporcionar una serie de datos de retrodispersión D(fm, x'n) de dicha escena,

estando asociados dichos datos de retrodispersión a una pluralidad de posiciones de la red de radares x'n, n=0... N-1, N>1, separadas de manera regular a lo largo de un eje de dicha red de radares;

10

5

muestreándose los datos de retrodispersión, para cada posición de la red de radares x'<sub>n</sub>, a frecuencias diferentes f<sub>m</sub>, m=0...M-1, M>1, definidas por f<sub>m</sub>=f<sub>c</sub>-B/2+m· $\Delta$ f, en la que f<sub>c</sub> representa una frecuencia central, B un ancho de banda y  $\Delta$ f un paso de frecuencia;

15 calcular una imagen de reflectividad de radar  $I(\alpha_{m'}, \beta_{n'})$  en un sistema de coordenadas pseudopolares, en el que las coordenadas  $\alpha$  y  $\beta$  de un punto de dicha escena pueden expresarse mediante las ecuaciones:

$$\alpha = \frac{2\rho}{c}$$
$$\beta = \frac{2x}{\lambda_c \rho}$$

20

#### en las que

p indica una distancia de alcance desde un centro de la red de radares hasta dicho punto,

25 x indica una coordenada, con respecto a dicho eje, de una proyección ortogonal de dicho punto en dicha red de radares unidimensional,

c indica la velocidad de la luz, y

30  $\lambda_c$  una longitud de onda central del radar,

realizándose dicho cálculo de dicha imagen de reflectividad de radar  $I(\alpha_{m'}, \beta_{n'})$  basándose en la siguiente fórmula:

$$I(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\beta}_{n'}) = \sum_{p=0}^{P_{\max}} I_p(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\beta}_{n'}),$$

35

con

$$I_{p}(\boldsymbol{\alpha}_{m'},\boldsymbol{\beta}_{n'}) = \frac{1}{p!} \left[ \frac{-j2\pi\beta_{n'}}{f_{c}} \right]^{p} FFT2D \left[ D(f_{m}, x'_{n})(\hat{f}_{m}x'_{n})^{p} \right],$$

40 en la que

j representa la unidad imaginaria,

$$\hat{f}_m = -B/2 + m \cdot \Delta f$$
,

45

*FFT2D* indica un operador de transformada rápida de Fourier 2D,  $\alpha_{m'}$ , m'=0...M-1, y  $\beta_{n'}$ , n'=0...N-1 representa una retícula regular en dicho sistema de coordenadas pseudopolares,

y  $P_{max}$  se selecciona  $\ge 0$  dependiendo de una precisión predefinida que va a lograrse.

2. Procedimiento según la reivindicación 1, en el que dichas posiciones de la red de radares se definen por x'n=-L\_x/2+n- $\Delta x'$ , en la que L<sub>x</sub> representa una longitud de la red de radares y  $\Delta x'$  la separación entre dichas posiciones de la red de radares.

5 3. Procedimiento según la reivindicación 1 ó 2, en el que P<sub>max</sub> se selecciona dependiendo de la razón de la longitud de la red de radares con respecto a la resolución de alcance.

4. Procedimiento según cualquiera de las reivindicaciones 1 a 3, en el que dicha imagen de reflectividad de radar en dicho sistema de coordenadas pseudopolares se mapea en al menos uno de entre un sistema de coordenadas polares y un sistema de coordenadas cartesianas.

5. Procedimiento según cualquiera de las reivindicaciones 1 a 4, en el que al menos una de entre una imagen de coherencia y un interferograma de fase 2D se calcula basándose en dicha imagen de reflectividad de radar en dicho sistema de coordenadas pseudopolares.

15

6. Procedimiento según la reivindicación 5, en el que dicha al menos una de entre una imagen de coherencia y un interferograma de fase 2D se mapea en al menos uno de entre un sistema de coordenadas polares y un sistema de coordenadas cartesianas.

20 7. Procedimiento de obtención de imágenes por radar de una escena en el campo lejano de una red de radares bidimensional, que comprende

proporcionar una serie de datos de retrodispersión D(fm, x'n, y'k) de dicha escena,

estando asociados dichos datos de retrodispersión a una pluralidad de posiciones de la red de radares (x'n,y'k) n=0...N-1, N>1, k=0...K-1, K>1, separadas de manera regular a lo largo de un primer y segundo ejes de dicha red de radares;

muestreándose los datos de retrodispersión, para cada posición de la red de radares (x'<sub>n</sub>,y'<sub>k</sub>) a frecuencias diferentes
 f<sub>m</sub>, m=0...M-1, M>1, definidas por f<sub>m</sub>=f<sub>c</sub>-B/2+m·∆f, en la que f<sub>c</sub> representa una frecuencia central, B un ancho de banda y ∆f un paso de frecuencia;

calcular una imagen de reflectividad de radar I( $\alpha_m$ ',  $\beta_n$ ',  $\gamma_k$ ') en un sistema de coordenadas pseudoesféricas, en el que las coordenadas  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  de un punto de dicha escena pueden expresarse mediante las ecuaciones:

35

$$\alpha = \frac{2\rho}{c}$$

$$\beta = \frac{2x}{\lambda_c \rho}$$

$$\gamma = \frac{2y}{\lambda_c \rho}$$

en las que

40 ρ indica una distancia de alcance desde un centro de la red de radares hasta dicho punto,

x indica una coordenada, con respecto a dicho primer eje, de una proyección ortogonal de dicho punto en dicha red de radares bidimensional,

45 y indica una coordenada, con respecto a dicho segundo eje, de dicha proyección ortogonal de dicho punto en dicha red de radares bidimensional,

c indica la velocidad de la luz, y

50  $\lambda_c$  una longitud de onda central del radar,

realizándose dicho cálculo de dicha imagen de reflectividad de radar  $I(\alpha_{m'}, \beta_{n'}, \gamma_{K'})$  basándose en la siguiente fórmula:

$$I(\boldsymbol{\alpha}_{m'}, \boldsymbol{\beta}_{n'}, \boldsymbol{\gamma}_{k'}) = \sum_{p=0}^{P_{\max}} I_p(\boldsymbol{\alpha}_{m'}, \boldsymbol{\beta}_{n'}, \boldsymbol{\gamma}_{k'}),$$

con

$$I_{p}(\alpha_{m'},\beta_{n'},\gamma_{k'}) = \left[\frac{-j2\pi}{f_{c}}\right]^{p} \sum_{q=0}^{p} \frac{\beta_{m'}^{q} \gamma_{k'}^{p-q}}{q!(p-q)!} FFT3D \left[D(f_{m},x'_{n},y'_{k})\hat{f}_{m}^{p} x_{n'}^{q} y_{k'}^{p-q}\right],$$

5

en la que

j representa la unidad imaginaria,

10

$$f_m = -B/2 + m \cdot \Delta f$$
,

FFT3D indica un operador de transformada rápida de Fourier 3D,

15  $\alpha_{m'}$ , m'=0...M-1, <sub>n'</sub>, n'=0...N-1 y  $\gamma_{k'}$ , k=0...K-1, representan una retícula regular en dicho sistema de coordenadas pseudoesféricas, y P<sub>max</sub> se selecciona  $\geq$  0 dependiendo de una precisión predefinida que va a lograrse.

8. Procedimiento según la reivindicación 7, en el que dichas posiciones de la red de radares se definen por x'n=-L<sub>x</sub>/2+n·Δx' a lo largo de dicho primer eje, representando L<sub>x</sub> una longitud de la red de radares a lo largo de dicho primer eje, y por y'<sub>k</sub>=-L<sub>y</sub>/2+k·Δy' a lo largo de dicho segundo eje, representando L<sub>y</sub> una longitud de la red de radares a lo largo de dicho segundo eje.

9. Procedimiento según la reivindicación 7 u 8, en el que P<sub>max</sub> se selecciona dependiendo de las razones de las longitudes de la red de radares a lo largo de dicho primer y dicho segundo eje con respecto a la resolución de alcance.

 10. Procedimiento según cualquiera de las reivindicaciones 7 a 9, en el que dicha imagen de reflectividad de radar en dicho sistema de coordenadas pseudoesféricas se mapea en al menos uno de entre un sistema de coordenadas esféricas y un sistema de coordenadas cartesianas.

11. Procedimiento según cualquiera de las reivindicaciones 7 a 10, en el que al menos una de entre una imagen de coherencia y un interferograma de fase 3D se calcula basándose en dicha imagen de reflectividad de radar en dicho sistema de coordenadas pseudoesféricas.

35

12. Procedimiento según la reivindicación 11, en el que dicha al menos una de entre una imagen de coherencia y un interferograma de fase 3D se mapea en al menos uno de entre un sistema de coordenadas esféricas y un sistema de coordenadas cartesianas.

40 13. Procedimiento según cualquiera de las reivindicaciones anteriores, en el que dicha imagen de reflectividad se calcula en tiempo real o casi en tiempo real.

14. Producto de programa informático para controlar un aparato de procesamiento de datos, que comprende instrucciones que hacen que dicho aparato de procesamiento de datos lleve a cabo el procedimiento según cualquiera de las reivindicaciones anteriores, cuando se ejecuta en dicho aparato de procesamiento de datos.











Fig. 3

14	16							14	16				Δ	x'	
CPC	00	00	0-0	00	00	DO	00	ĊĊ	0:0	60	00	00	D:O	00	
00	00	00	00	00	00	00	00	DO		00	DO	00	DD	DO	
0-0	0-0	<b>D:O</b>	œ	0-0	D:O	00	<b>CC</b>	0:0	DÐ	00	0-0	며	œ	œ	L Jy
D•O	D*0	00	00	00		<b>D:O</b>	<b>CC</b>	00	<b>DO</b>	0-0	00	<b>DO</b>	0-0	00	
0-0	D:0	<b>D:O</b>	<b>C</b> :0	0:0	D:O	D:O	<b>C</b>	0-0	D:O	60	00	D•D	0-0	œ	-10'
D:O	00	<b>DO</b>	00	00	D•O	ĿО	0:0	<b>D</b> •O	0-0	00	œ	00	0-0	00	
œ	<b>D:O</b>	<b>D:O</b>	<b>C</b> O	0-0	0-0	<b>D:</b> O	00	0-0	0-0	040	0-0	00	<b>D:O</b>	œ	
œ	<b>D:O</b>	<b>C</b> -C	<b>C:O</b>	0:0	<b>D:O</b>	0-0	60	0:0	D:O	0-0	œ0	<b>DO</b>	00	00	1
<u>0</u> 0	0-0	<b>DC</b>	00	80	00	00	60	0-0	040	00	00	D:O	00	00	]

Fig. 4

14	16	14		16	20	Ľ.	∆x'	
Ø O		o Dogio	0 200	Dog o		0020	Dç⊠	
	• 🛛	0 0 20	2 o 🖸 o	0 0 0	3 0 00	3 o 🛛 o	S •	
Ø		o <u>∏</u> o⊠ o	Do 🛛 o	00200	00000	□o⊠ o	<b>□•</b> ⊠	Ду
	• 🛛	o⊠ o ⊡o	8 o 🛛 o	⊠ o ⊡o	3 0 00	a 🛛 o	8 ° D	
Øo	00Ø	0 200 0	0000	0000	00 Ø	00000	□∘⊠	<b>4</b> 10"
	• •	o⊡ o ⊠o	3 o 🛛 o	0 0 0	3 o Do	3 o 🛛 o	3 ° D	
X o		o <u>∏</u> o⊠ o	□o⊠ o	0 200	□o⊠ o	[]oĝ] o		
	• •	∞⊠ o ⊡o	0 Do	0 Do	3 0 00		× 0	
Øo		0 10 20 0	00 <u>8</u> 0	0 200	0000 0	<b>□</b> o⊠ o		

Fig. 5



Fig. 6



Fig. 7





Fig. 9