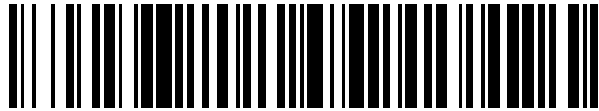


19



OFICINA ESPAÑOLA DE
PATENTES Y MARCAS

ESPAÑA



11 Número de publicación: **2 532 833**

51 Int. Cl.:

G02C 7/02 (2006.01)

G02C 7/06 (2006.01)

12

TRADUCCIÓN DE PATENTE EUROPEA

T3

96 Fecha de presentación y número de la solicitud europea: **29.03.2012 E 12715536 (4)**

97 Fecha y número de publicación de la concesión europea: **11.02.2015 EP 2710428**

54 Título: **Procedimiento para calcular y optimizar un cristal de gafa teniendo en cuenta aberraciones de orden superior**

30 Prioridad:

18.05.2011 DE 102011101923

45 Fecha de publicación y mención en BOPI de la traducción de la patente:

01.04.2015

73 Titular/es:

**RODENSTOCK GMBH (100.0%)
Elsenheimer Strasse 33
80687 München, DE**

72 Inventor/es:

**ESSER, GREGOR;
ALTHEIMER, HELMUT;
BECKEN, WOLFGANG y
UTTENWEILER, DIETMAR**

74 Agente/Representante:

AYMAT ESCALADA, Carlos Jesús

ES 2 532 833 T3

Aviso: En el plazo de nueve meses a contar desde la fecha de publicación en el Boletín europeo de patentes, de la mención de concesión de la patente europea, cualquier persona podrá oponerse ante la Oficina Europea de Patentes a la patente concedida. La oposición deberá formularse por escrito y estar motivada; sólo se considerará como formulada una vez que se haya realizado el pago de la tasa de oposición (art. 99.1 del Convenio sobre concesión de Patentes Europeas).

DESCRIPCIÓN

La presente invención se refiere a un procedimiento y un producto de programa informático correspondiente para calcular (optimizar) y fabricar un cristal de gafa teniendo en cuenta aberraciones de orden superior tanto del ojo como del cristal de gafa.

5 Para la fabricación o la optimización de cristales de gafa, en particular de cristales de gafa individuales, cada cristal de gafa se fabrica de modo que para cada dirección deseada de la mirada o cada punto deseado del objeto se logra una corrección de un defecto de refracción de cada ojo del usuario de la gafa. Por lo general, un cristal de gafa para una dirección determinada de la mirada se considera enteramente corregido cuando los valores Esfera, Cilindro y Eje del frente de onda al pasar por el globo ocular coinciden con los valores Esfera, Cilindro y Eje de la prescripción para el ojo amétrope. En la determinación de la refracción para el ojo de un usuario de gafa se determinan valores dióptricos (en particular Esfera, Cilindro, posición Axial) para una amplia distancia (por lo general infinita) y eventualmente (para cristales multifocales y/o progresivos) una adición para una distancia cercana (por ejemplo según DIN 58208). De este modo se define la prescripción (en particular Esfera, Cilindro, posición Axial y eventualmente de adición) que se facilita al fabricante de gafas. En el caso de cristales modernos para gafa se pueden indicar además también distancias del objeto, utilizadas para determinar la refracción, que difieren de la norma.

En el caso normal no es posible sin embargo una corrección completa para todas las direcciones de la mirada simultáneamente. Por esta razón, los cristales de gafa se fabrican de forma que principalmente en las zonas principales de utilización, en particular en las zonas centrales del punto de recorrido de la vista (punto visual) proporcionan una buena corrección de las ametropías del ojo y solamente pequeñas distorsiones de la imagen, mientras que en las zonas periféricas se permiten aberraciones mayores.

Para poder fabricar de este modo un cristal de gafa, se procede primero al cálculo de las superficies del cristal de gafa o por lo menos de una de las superficies del cristal de gafa de forma que se obtiene de este modo la distribución deseada de las aberraciones inevitables. Este cálculo y optimización se suele realizar utilizando un método de variación iterativo, minimizando una función de rendimiento. Como función de rendimiento se tiene en cuenta y minimiza en particular una función F con la siguiente relación funcional con el efecto esférico S , la cuantía del efecto cilíndrico Z y la posición axial del cilindro α (llamado también en combinación "SZA"):

$$F = \sum_{i=1}^m [g_{i,S\Delta}(S_{\Delta,i} - S_{\Delta,i,Soll})^2 + g_{i,Z\Delta}(Z_{\Delta,i} - Z_{\Delta,i,Soll})^2 + \dots]$$

En la función de rendimiento F , en las zonas de valoración i del cristal de gafa se tiene en cuenta por lo menos los déficits reales de refracción del efecto esférico $S_{\Delta,i}$ y el efecto cilíndrico $Z_{\Delta,i}$ así como especificaciones teóricas para los déficits de refracción del efecto esférico $S_{\Delta,i,Soll}$ (teórico) y el efecto cilíndrico $Z_{\Delta,i,Soll}$ (teórico).

Ya en la patente DE 103 13 275 se veía que resultaba ventajoso no indicar las especificaciones teóricas como valores absolutos de las propiedades a optimizar sino como su desviación respecto de la prescripción, es decir como acomodación defectuosa requerida. Esto presenta la ventaja de que las especificaciones teóricas son independientes de la prescripción (Sph_v , Zyl_v , $Achse_v$ (eje), Pr_v , B_v) y no se tienen que modificar las especificaciones teóricas para cada prescripción individual. Como valor real de las propiedades a optimizar no se introducen por lo tanto tampoco la función de rendimiento valores absolutos de estas propiedades ópticas, sino las desviaciones respecto de la prescripción. Esto presenta la ventaja de que las especificaciones teóricas se pueden dar independientemente de la prescripción y no se tienen que modificar para cada prescripción individual.

Los déficits de refracción correspondientes en las zonas de valoración son tenidos de preferencia en cuenta con factores de ponderación $g_{i,S\Delta}$ y/o $g_{i,Z\Delta}$. Aquí las especificaciones teóricas para los déficits de refracción del efecto esférico $S_{\Delta,i,Soll}$ y/o el efecto cilíndrico $Z_{\Delta,i,Soll}$ (teórico), en particular junto con los valores de ponderación $g_{i,S\Delta}$ y/o $g_{i,Z\Delta}$ constituyen el denominado diseño de cristal de gafa. Aparte de esto se pueden tener en cuenta en particular también otros residuos, sobre todo otras magnitudes a optimizar, como por ejemplo coma y/o aberración esférica y/o prisma y/o engrosamiento y/o distorsión anamorfótica, etc., lo cual se indica con la expresión "+...".

En algunos casos puede contribuir a una mejora evidente, en particular una acomodación individual de un cristal de gafa, cuando en la optimización del cristal de gafa no se tienen solamente en cuenta aberraciones de hasta segundo orden (Esfera, Magnitud del Astigmatismo y Posición Axial), sino también de orden superior (por ejemplo coma, coma triangular, aberración esférica).

También se sabe, en el estado de la técnica, determinar la forma de un frente de onda, para elementos ópticos y en particular para cristales de gafa limitados por lo menos por dos límites refractivos refringentes. Esto se puede realizar por ejemplo mediante cálculo numérico de un número suficiente de rayos contiguos, combinado con el ulterior Fit de los datos del frente de onda mediante polinomios de Zernike. Otra fórmula se basa en un cálculo del frente de onda local en la refracción (véase WO 2008/089999 A1). Aquí sólo se calcula un rayo (el rayo principal) por punto de recorrido de la vista (punto visual), y como acompañante, las derivadas de la flecha de arco del frente de onda según las coordenadas transversales (verticalmente al rayo principal). Estas derivadas se pueden formar hasta

un orden determinado, donde las segundas derivadas describen las propiedades locales de la curvatura del frente de onda (por ejemplo como distancia focal/poder refringente, astigmatismo) y las derivadas superiores están relacionadas con las aberraciones de orden superior.

5 Para realizar el cálculo de la luz a través de un cristal de gafa se calculan las derivadas locales del frente de onda en una posición adecuada del recorrido del rayo para compararlas con los valores deseados que se desprenden de la refracción del usuario del cristal de gafa. Esta posición puede ser por ejemplo del globo cenital vértice. Para ello se supone que un frente de onda esférico sale del punto del objeto y se propaga hasta la primera superficie del cristal de gafa. El frente de onda se refracta y se propaga seguidamente hasta la segunda superficie del cristal de gafa donde se vuelve a refractar. Si hay más superficies, se prosigue la alternancia de propagación y refracción hasta 10 pasar por la última superficie límite. La última propagación se produce entonces desde esta última superficie límite hasta el globo cenital vértice.

15 El documento WO 2008/089999 A1 expone las leyes de la refracción en superficies refractivas no solamente para aberraciones y/o propiedades ópticas de segundo grado sino también para órdenes superiores. Cuando un frente de onda con derivadas locales conocidas hasta cierto orden incide oblicuamente con una superficie límite cuya flecha de arco misma se puede describir mediante derivadas locales conocidas hasta el mismo orden, se puede calcular entonces con los procedimientos de cálculo del escrito WO 2008/089999 A1 las derivadas locales del frente de onda saliente hasta el mismo orden. Un cálculo de este tipo, en particular hasta segundo orden, resulta muy útil para juzgar las propiedades de la imagen y propiedades ópticas de un cristal de gafa en posición de uso. En particular un cálculo de este tipo presenta gran importancia cuando se tiene que optimizar un cristal de gafa en posición de uso a 20 través de todos los puntos de recorrido de la vista (puntos visuales).

Aunque el procedimiento de refracción se puede describir y calcular de este modo de forma muy eficiente, el tener en cuenta las aberraciones de orden superior resulta sin embargo muy costoso ya que en particular el cómputo iterativo del rayo para la propagación de los frentes de onda requiere unos cálculos muy complejos.

25 Lo que se pretende con la presente invención es presentar un procedimiento mejorado para calcular u optimizar un cristal de gafa, de preferencia un cristal de gafa progresivo, donde el cristal de gafa se ajusta mejor a los requisitos individuales del usuario de la gafa. Este problema se resuelve con un procedimiento implementado por ordenador, un dispositivo, un producto de programa informático y un soporte de datos con las características indicadas en las reivindicaciones independientes. Serán objeto de las reivindicaciones dependientes unas formas de realización preferidas.

30 Según un primer aspecto, la invención ofrece por lo tanto un procedimiento implementado por ordenador para calcular u optimizar un cristal de gafa. El procedimiento comprende en primer lugar la especificación de por lo menos una superficie para el cristal de gafa que se va a calcular u optimizar. Estas superficies sirven en particular de superficie inicial para la optimización individual siguiente. De preferencia se trata aquí de la superficie trasera del cristal de gafa. De preferencia se especifica aquí una superficie inicial correspondiente tanto para la superficie delantera como para la superficie trasera del cristal de gafa. En una forma de realización preferida sin embargo, durante el procedimiento de optimización sólo se modifica y/u optimiza iterativamente una superficie. La otra superficie del cristal de gafa tiene por ejemplo una superficie esférica simple o una superficie esférica de simetría de 35 rotación. También es posible optimizar ambas superficies.

40 Partiendo de por lo menos una superficie especificada, el procedimiento comprende la determinación del recorrido de un rayo principal por, por lo menos, un punto de recorrido de la vista (punto visual) (i) de por lo menos una superficie. Calcula particularmente de preferencia el recorrido del rayo principal partiendo de un punto del objeto, pasando por el cristal de gafa hasta una superficie de referencia o superficie de valoración o superficie de comparación, en particular el globo cenital vértice.

45 En por lo menos un punto de recorrido de la vista (punto de vista clara o punto visual)) (i) se calcula primero un primer juego primario (s_{io}) y un segundo conjunto primario ($e_{io,k}$) de coeficientes de la aberración local de un frente de onda local que sale por lo menos de un punto de recorrido de la vista (punto visual) en un entorno del rayo principal donde el primer conjunto primario de coeficientes (s_{io}) define la aberración esférica y astigmática del frente de onda local saliente y el segundo conjunto primario de coeficientes ($e_{io,k}$) define por lo menos otra aberración de orden superior ($k > 2$) del frente de onda local saliente. El frente de onda local saliente (o denominado también frente de onda inicial) es el resultado de la refracción de la luz en por lo menos una superficie. En el caso de que la superficie sea una superficie delantera, refleja el frente de onda saliente de preferencia, además de la distancia del objeto (y la vergencia correspondiente del frente de onda antes de impactar sobre esta superficie) las propiedades locales de refracción de la superficie. El proceso de la refracción se podría calcular particularmente de forma análoga a lo 50 indicado en WO 2008/089999 A1 o en J. Opt. Soc. Am. A 27, 218-237.

55 La invención propone además especificar una función $e_{pk} = f(e_{ok})$, que hace corresponder a un segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}) un segundo conjunto secundario de coeficientes (e_{pk}), que define por lo menos una aberración de orden superior de un frente de onda propagado. En particular, con esta función resulta muy fácil calcular la propagación de un frente de onda sobre la base de coeficientes del frente de onda inicial.

60 Por consiguiente el procedimiento según la invención comprende el cálculo de por lo menos una aberración de orden superior de un frente de onda local propagado a lo largo del rayo principal que sale de por lo menos un punto

de recorrido de la vista (punto visual) (i) en función de por lo menos el segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}) con la ayuda de la función especificada $e_{pk} = f(e_{ok})$. En particular se calcula además un primer conjunto y un segundo conjunto secundario de coeficientes del frente de onda propagado. Mientras la curvatura esférica y la astigmática del frente de onda, posea el primer conjunto secundario de coeficientes se puede determinar en principio de forma conocida, en particular sobre la base del primer conjunto primario de coeficientes, la invención propone un método muy eficiente para calcular también el segundo conjunto secundario de coeficientes sin que esto suponga un costoso cálculo del rayo como ocurre en el procedimiento tradicional.

Con el fin de favorecer una exposición clara de aspectos de la invención se utilizará la terminología siguiente para designar los coeficientes. Los coeficientes o conjuntos de coeficientes utilizados y/o calculados para describir el frente de onda local saliente (inicial) recibirán el nombre de coeficientes "primarios" y/o conjuntos "primarios" de coeficientes. Del mismo modo, los coeficientes o conjuntos de coeficientes utilizados y/o calculados para describir el frente de onda local propagado recibirán el nombre de coeficientes "secundarios" o conjuntos de coeficientes "secundarios". Además los coeficientes y/o conjuntos de coeficientes calculados y/o utilizados para la descripción de la aberración esférica y astigmática del frente de onda local correspondiente reciben el nombre de "primeros" coeficientes o "primeros" juegos de coeficientes, mientras que los coeficientes o conjuntos de coeficientes calculados y/o utilizados para describir las aberraciones que difieren (o que superan) de las aberraciones esféricas y astigmáticas, es decir las aberraciones de orden superior reciben el nombre de "segundos" coeficientes o "segundos" conjuntos de coeficientes.

Como la influencia debida a la refracción del cristal de gafa sobre el frente de onda es muy eficiente incluso para aberraciones de orden superior se determinó (como se describe en WO 2008/089999 A1 o en J. Opt. Soc. Am. A 27, 218-327), el procedimiento según la invención comprende un cálculo u optimización de por lo menos una superficie del cristal de gafa teniendo en cuenta las aberraciones de orden superior determinadas del frente de onda local propagado. De preferencia se realiza además en el globo cenital vértice una comparación de la influencia del frente de onda ejercida por el cristal de gafa a optimizar con la prescripción requerida teniendo en cuenta aberraciones de orden superior. Según la desviación se varía por lo menos una de las superficies del cristal de gafa y se repite el proceso hasta que el cristal de gafa se aproxima al efecto requerido.

La invención permite de este modo tener en cuenta de forma muy rápida y exacta aberraciones de orden superior con una serie de cálculos notablemente reducidos. De este modo, sin incrementar esencialmente el cálculo necesario se consigue una mejora de la acomodación individual de un cristal de gafa.

La especificación de por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$ comprende la especificación de una función lineal $e_{pk} = B_k(e_{ok} + r_k)$, o la función $e_{pk} = f(e_{ok})$ se especifica como una función lineal $e_{pk} = B_k(e_{ok} + r_k)$ en la cual el término de proporcionalidad B_k depende del primer conjunto primario de coeficientes (s_{io}) pero no del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}). De preferencia el término residual r_k no depende tampoco del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}). Resulta particularmente preferido incluso que $r_k = 0$, es decir $e_{pk} = B_k e_{ok}$. Estas formas de realización conducen a una optimización muy deficiente y en particular para tener en cuenta aberraciones de tercer orden ($k = 3$).

Para una consideración particularmente eficiente de aberraciones de tercer orden (por ejemplo coma) es preferible que la determinación de un primer conjunto primario de coeficientes comprenda la determinación de un factor de poder $S_o = \begin{pmatrix} S_{xxx} \\ S_{oxy} \\ S_{yy} \end{pmatrix}$, donde la determinación de un segundo conjunto primario de coeficientes comprende la

determinación de un vector de coma $e_{o3} = \begin{pmatrix} E_{xxxx} \\ E_{oxy} \\ E_{oxyy} \\ E_{yy} \end{pmatrix}$ y donde se especifica como por lo menos una función $e_{p3} = f(e_{o3})$ la función.

$$e_{p3} = B_3 e_{o3} = y^3 \begin{pmatrix} \beta^{-3} & 3\beta_y^{-2} d/n S_{xy} & 3\beta_y^{-1} (d/n S_{xy})^2 & (d/n S_{xy})^2 \\ \beta_y^{-2} d/n S_{xy} & \beta_y^{-1} (1/\gamma + 3(d/n S_{xy})^2) & 2/\gamma d/n S_{xy} + 3(d/n S_{xy})^3 & \beta_x^{-1} (d/n S_{xy})^2 \\ \beta_y^{-1} (d/n S_{xy})^2 & 2/\gamma d/n S_{xy} + 3(d/n S_{xy})^3 & \beta_y^{-1} (1/\gamma + 3(d/n S_{xy})^2) & \beta_y^{-2} d/n S_{xy} \\ (d/n S_{xy})^3 & 3\beta_x^{-1} (d/n S_{xy})^2 & 3\beta_y^{-2} d/n S_{xy} & \beta_x^{-3} \end{pmatrix} e_{o3}$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{1 - d/n S_{xxx} - (d/n S_{oxy})^2 - d/n S_{oyy} + (d/n)^2 S_{xxx} S_{oyy}}, \beta_x = \frac{1}{1 - d/n S_{xxx}} \text{ y } \beta_y = \frac{1}{1 - d/n S_{oyy}}.$$

En una forma de realización preferida la determinación del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}) comprende la determinación de por lo menos una multiplicidad de conjuntos primarios parciales (e_{iok} para $k = 3, 4, \dots$) del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}). Aquí la especificación comprende por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$ de preferencia la especificación de una función lineal $e_{pk} = B_k(e_{ok} + r_k)$ para cada conjunto parcial (es decir

para cada $k = 3, 4, \dots$) de forma que para cada una de las funciones lineales (es decir para cada $k = 3, 4, \dots$) el término de proporcionalidad B_k depende del primer conjunto primario de coeficientes (s_{i0}) pero no del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}). De preferencia el término restante r_{k0} una función lineal del conjunto parcial de orden k_0 no depende de los coeficientes de cada conjunto parcial k_0 sino como máximo de coeficientes del conjunto parcial anterior o de los conjuntos parciales anteriores (es decir los coeficientes de orden $k < k_0$). Los conjuntos parciales (e_{iok} para $k = 3, 4, \dots$) del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}) se determinan de preferencia de forma que constituyan una serie de conjuntos parciales sucesivos en una sucesión determinada o determinable de órdenes crecientes. En particular cada conjunto parcial representa aquí aberraciones de orden correspondiente, que representa por ejemplo el orden ($k = 3, 4, \dots$) de polinomios correspondientes de Zernike de la aberración correspondiente.

En una forma de realización particularmente preferida la determinación del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}) comprende la determinación de por lo menos un primer conjunto parcial primario (e_{i03}) y un segundo conjunto parcial primario (e_{i04}) del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}). La especificación de por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$ comprende de preferencia la especificación de una primera función lineal $e_{p3} = B_3(e_{o3} + r_3)$, en la que el término de proporcionalidad B_3 depende del primer conjunto primario de coeficientes (s_{i0}), pero no del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}). De preferencia el término restante r_3 no depende tampoco del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}). Particularmente de preferencia se tiene incluso $r_3 = 0$, es decir $e_{p3} = B_3 e_{o3}$. Además la especificación de por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$ comprende en esta forma de realización de preferencia la especificación de una segunda función lineal $e_{p4} = B_4(e_{o4} + r_4)$, en la que el término de proporcionalidad B_4 depende del primer conjunto primario de coeficientes (s_{i0}) pero no del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}). De preferencia el término restante r_4 no depende del segundo conjunto parcial primario (e_{i04}) del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}). Esto conduce a una optimización muy eficiente particularmente para tener en cuenta aberraciones de cuarto orden ($k = 4$). Muy particularmente de preferencia, el término restante r_4 de la segunda función lineal depende del primer conjunto parcial primario (e_{i03}) del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}).

Para tener en cuenta de forma particularmente eficiente aberraciones de cuarto orden (por ejemplo aberración esférica) es preferible que la especificación de un primer conjunto primario de coeficientes comprenda la especificación de un vector de poder $S_o = \begin{pmatrix} S_{oxxx} \\ S_{oixy} \\ S_{oyyy} \end{pmatrix}$, donde la especificación de un segundo conjunto primario de

coeficientes comprende la determinación de un vector de coma $e_{o3} = \begin{pmatrix} E_{oxxxx} \\ E_{oixxy} \\ E_{oixyy} \\ E_{oyyyy} \end{pmatrix}$ y la determinación de un vector de

aberración esférica $e_{o4} = \begin{pmatrix} E_{oxxxxx} \\ E_{oixxxy} \\ E_{oixxyy} \\ E_{oixyyy} \\ E_{oyyyyy} \end{pmatrix}$ y donde, como por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$ se especifica la función

$$e_{p4} = \begin{pmatrix} \beta_x^4 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \beta_x^3 \beta_y^1 & & \vdots \\ & & \beta_x^2 \beta_y^2 & \\ \vdots & & & \beta_x^1 \beta_y^3 \\ 0 & & \dots & \beta_y^4 \end{pmatrix}$$

$$\left(e_{o4} + \frac{d}{n} \begin{pmatrix} 3 \left(\beta_x E_{oxxxx}^2 + \beta_y E_{oixxy}^2 - \frac{S_{oxxx}^4}{n^2} \right) \\ 3 E_{oixxy} (\beta_x E_{oxxxx} + \beta_y E_{oixyy}) \\ \beta_x (2 E_{oixxy}^2 + E_{oixxx} E_{oixyy}) + \beta_y (2 E_{oixyy}^2 + E_{oixxy} E_{oyyyy}) - \left(\frac{S_{oxxx} S_{oyyy}}{n} \right)^2 \\ 3 E_{oixyy} (\beta_x E_{oixxy} + \beta_y E_{oyyyy}) \\ 3 \left(\beta_x E_{oixyy}^2 + \beta_y E_{oyyyy}^2 - \frac{S_{oyyy}^4}{n^2} \right) \end{pmatrix} \right)$$

con $\beta_x = \frac{1}{1 - d/n S_{oxxx}}$ y $\beta_y = \frac{1}{1 - d/n S_{oyyy}}$. Los coeficientes del vector de coma forman aquí en particular el primer conjunto parcial primario y los coeficientes del vector de aberración esférica constituyen en particular el segundo conjunto primario parcial del segundo conjunto primario de coeficientes.

De preferencia, el procedimiento comprende además la determinación de un ángulo α entre un primer plano de refracción del rayo principal en una primera superficie del cristal de gafa y un segundo plano de refracción del rayo principal en una segunda superficie del cristal de gafa, donde la determinación de una aberración comprende

- 5 - determinación un segundo conjunto secundario (e_{ipk}) de coeficientes de la aberración local del frente de onda propagado; y
- determinación de un segundo conjunto secundario transformado (\tilde{e}_{ipk}) de coeficientes en función de determinados ángulos α , en particular utilizando una matriz de rotación $R_k(\alpha)$. De este modo para cada fase de refracción se puede elegir de preferencia un sistema de coordenadas cartesianas de forma que el eje de un sistema de coordenadas cartesianas es vertical al plano de refracción y permanece inalterado al transitar por la superficie refringente, lo cual conduce a una simplificación del cálculo del proceso de refracción.

De preferencia el procedimiento comprende además la determinación de datos de prescripción y/o de refracción V , donde los datos de prescripción comprenden datos del efecto esférico Sph_V , la magnitud del astigmatismo Zyl_V , el eje de astigmatismo $Achse_V$, así como por lo menos otra refracción de orden superior HOA_V .

- 15 De preferencia el procedimiento comprende una minimización de una función de rendimiento donde se tienen en cuenta de forma explícita valores de aberraciones de orden superior, por ejemplo en forma de

$$\min F = \sum_i G_{R,i} (R_{Ist}(i) - R_{Soll}(i))^2 + G_{A,i} (A_{Ist}(i) - A_{Soll}(i))^2 + G_{C,i} (C_{Ist}(i) - C_{Soll}(i))^2 + G_{S,i} (S_{Ist}(i) - S_{Soll}(i))^2 + \dots$$

$R_{Ist}(i)$ efecto real de refracción (diferencia cristal de gafa y ojo) en el punto de valoración i-ésimo

$R_{Soll}(i)$ defecto de refracción requerido en la zona de valoración i-ésima

$G_{R,i}$ ponderación del defecto de refracción en la zona de valoración i-ésima

- 20 $A_{Ist}(i)$ diferencia astigmática real (diferencia cristal de gafa y ojo) en la zona de valoración i-ésima

$A_{Soll}(i)$ diferencia astigmática requerida en la zona de valoración i-ésima

$G_{A,i}$ ponderación de la diferencia astigmática en la zona de valoración i-ésima

y además

$C_{Ist}(i)$ diferencia real de la coma del cristal de gafa y del ojo en la zona de valoración i-ésima

- 25 $C_{Soll}(i)$ diferencia de coma requerida en la zona de valoración i-ésima

$G_{C,i}$ ponderación de la coma en la zona de valoración i-ésima

$S_{Ist}(i)$ diferencia real de la aberración esférica del cristal de gafa y del ojo en la zona de valoración i-ésima

$S_{Soll}(i)$ diferencia requerida de la aberración esférica en la zona de valoración i-ésima

$G_{S,i}$ ponderación de la aberración esférica en la zona de valoración i-ésima

- 30 Aumentando la función de rendimiento se incrementa sin embargo el grado de coincidencia, lo cual, en algunos casos, puede empeorar la estabilidad del procedimiento de optimización. Por este motivo es preferible no aumentar la función de rendimiento cuando las aberraciones de orden superior no entran explícitamente en dicha función sino cuando tanto las aberraciones de orden superior del ojo como también del cristal de gafa entran en los valores esfero-cilíndricos correspondientes. De preferencia, el procedimiento comprende en este caso una minimización de
- 35 la función de rendimiento en la cual se tienen en cuenta valores de aberraciones de orden superior implícitamente por medio de valores transformados del defecto de refracción y de la diferencia astigmática, por ejemplo en forma de

$$\min F = \sum_i G_{R,i} (R_{Ist,t}(i) - R_{Soll}(i))^2 + G_{A,i} (A_{Ist,t}(i) - A_{Soll}(i))^2$$

$R_{Ist,t}(i)$ defecto de refracción transformado (diferencia cristal de gafa y ojo) en la posición de valoración i-ésima

$R_{Soll}(i)$ defecto de refracción requerido en la zona de valoración i-ésima

- 40 $G_{R,i}$ ponderación del defecto de refracción en la zona de valoración i-ésima

$A_{Ist,t}(i)$ diferencia astigmática transformada (diferencia cristal de gafa y ojo) en la zona de valoración i-ésima

$A_{Soll}(i)$ diferencia astigmática requerida en la zona de valoración i-ésima

$G_{A,i}$ ponderación de la diferencia astigmática en la zona de valoración i-ésima

En una forma de realización preferida, el procedimiento comprende la determinación de un primer juego secundario transformado de coeficientes a partir del primer juego secundario de coeficientes y del segundo juego secundario de coeficientes. En particular se calcula para cada primer coeficiente secundario del juego de primeros coeficientes secundarios en función de por lo menos un coeficiente del segundo juego secundario de coeficientes, es decir en función de por lo menos una aberración de orden superior, un primer coeficiente secundario transformado. Los primeros coeficientes secundarios transformados definen entonces, por lo menos parcialmente, en particular la refracción esfero-cilíndrica transformada.

5 Para indicar cómo la refracción esfero-cilíndrica transformada (en forma de escritura cilindro-menos) depende de las aberraciones de orden superior en formas de realización preferida se dispone de preferencia de las siguientes funciones:

$$sph(u, v, w, r_0) = \frac{4\sqrt{3}}{r_0^2} \left(u + \frac{\sqrt{2}\sqrt{v^2 + w^2}}{2} \right)$$

$$zyl(v, w, r_0) = -\frac{4\sqrt{3}}{r_0^2} \sqrt{2}\sqrt{v^2 + w^2}$$

$$a(v, w, r_0) = \frac{1}{2} \arctg(w, v)$$

$$\arctg(x, y) = \begin{cases} \arctg(y/x), & x > 0 \\ \arctg(y/x) + \pi, & x < 0, y > 0 \\ \pi, & x < 0, y = 0 \\ \arctg(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

15 En una forma de realización en la cual las aberraciones de orden superior no se utilizan por lo menos de forma explícita para la transformación de los valores esfero-cilíndricos se da de preferencia una refracción transformada mediante

$$Sph(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}, r_0) = sph(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, r_0)$$

$$Zyl(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}, r_0) = zyl(c_2^{-2}, c_2^2, r_0)$$

$$20 \quad A(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}, r_0) = a(c_2^{-2}, c_2^2, r_0)$$

donde c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2 representan en la notación de las normas OSA coeficientes de Zernike de segundo orden c_n^m con $n \geq 3$ coeficientes de Zernike de orden superior del frente de onda, véase por ejemplo Jason Porter et al. "Adaptive Optics for Vision Science", Wiley (2006), página 522. La magnitud r_0 corresponde al radio de la pupila. Además el procedimiento comprende de preferencia la determinación de un radio de la pupila r_0 . El procedimiento comprende también de preferencia la determinación de coeficientes de Zernike de segundo orden (c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2).

Una forma de realización preferida teniendo en cuenta las aberraciones de orden superior en la determinación de la refracción esfero-cilíndrica transformada, o sea en una transformación de los valores esfero-cilíndricos en función de los segundos coeficientes secundarios, viene dada por

$$Sph(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = sph \left(c_2^0, c_2^{-2} + \sqrt{5/3} c_4^{-2}, c_2^2 + \sqrt{5/3} c_4^2 \right)$$

$$30 \quad Zyl(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = zyl \left(c_2^{-2} + \sqrt{5/3} c_4^{-2}, c_2^2 + \sqrt{5/3} c_4^2 \right)$$

$$A(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = a \left(c_2^{-2} + \sqrt{5/3} c_4^{-2}, c_2^2 + \sqrt{5/3} c_4^2 \right)$$

Otra forma de realización preferida alternativa viene dada por:

$$Sph(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = sph \left(c_2^0 + \sqrt{5/3} c_4^0, c_2^{-2} + \sqrt{5/3} c_4^{-2}, c_2^2 + \sqrt{5/3} c_4^2 \right)$$

$$Zyl(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = zyl \left(c_2^{-2} + \sqrt{5/3} c_4^{-2}, c_2^2 + \sqrt{5/3} c_4^2 \right)$$

$$35 \quad A(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = a \left(c_2^{-2} + \sqrt{5/3} c_4^{-2}, c_2^2 + \sqrt{5/3} c_4^2 \right)$$

Otra forma de realización preferida viene dada por:

$$Sph(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = sph(c_2^0 + 2\sqrt{15}c_4^0, c_2^{-2} + 3\sqrt{15}c_4^{-2}, c_2^2 + 3\sqrt{15}c_4^2)$$

$$Zyl(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = zyl(c_2^{-2} + 3\sqrt{15}c_4^{-2}, c_2^2 + 3\sqrt{15}c_4^2)$$

$$A(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = a(c_2^{-2} + 3\sqrt{15}c_4^{-2}, c_2^2 + 3\sqrt{15}c_4^2)$$

- 5 De forma algo más general una forma de realización preferida viene dada por las funciones:

$$Sph(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = sph(c_2^0 + \Delta c_2^0, c_2^{-2} + \Delta c_2^{-2}, c_2^2 + \Delta c_2^2)$$

$$Zyl(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = zyl(c_2^{-2} + \Delta c_2^{-2}, c_2^2 + \Delta c_2^2)$$

$$A(c_2^0, c_2^{-2}, c_2^2, \{c_n^m\}) = a(c_2^{-2} + \Delta c_2^{-2}, c_2^2 + \Delta c_2^2)$$

- 10 donde las variaciones $\Delta c_2^0, \Delta c_2^{-2}, \Delta c_2^2$ son funciones (en particular funciones continuas) de los coeficientes de Zemike c_n^m de orden superior de la función de onda, donde $n \geq 3$.

- 15 De preferencia la determinación de datos de prescripción comprende la determinación de primeros datos de prescripción para un primer alejamiento del objeto y de segundos datos de prescripción para un segundo alejamiento del objeto. En particular se puede tener en cuenta de este modo, de forma individual, la influencia del alejamiento del objeto sobre el tamaño de la pupila. Así por ejemplo un tamaño de pupila modificado repercute sobre todo en las aberraciones de orden superior.

De preferencia el procedimiento comprende además:

- la especificación de un modelo de distancia del objeto $Al(x, y)$, donde Al designa el alejamiento del objeto y (x, y) una zona o un punto de recorrido de la vista punto visual) a través del cristal de gafa en un sentido especificado o especificable;
- 20 - la especificación de una función $r_0 = g(Al)$ que describe la dependencia de un tamaño de pupila r_0 respecto del alejamiento del objeto Al ;
- la determinación de un tamaño de pupila para el, por lo menos uno, rayo principal (10) mediante el modelo de distancia del objeto $Al(x, y)$ y la función especificada $r_0 = g(Al)$.

De preferencia el cristal de gafa a optimizar es un cristal de gafa progresivo.

- 25 En otro aspecto, la invención ofrece un dispositivo para calcular y optimizar un cristal de gafa que comprende:

- una base de datos de modelos de superficie para especificar por lo menos una superficie para el cristal de gafa a calcular y/u optimizar;
- unos dispositivos de determinación del rayo principal para determinar el recorrido de un rayo principal (10) a través de por lo menos un punto de recorrido (punto visual) (i) de por lo menos una superficie;
- 30 - dispositivo de cálculo de coeficientes primarios para determinar un primer juego primario (s_{i0}) y un segundo juego primario (e_{iok}) de coeficientes de la aberración local de un frente de onda (18) local que sale de por lo menos un punto (i) en un entorno del rayo principal (10), donde el primer juego primario de coeficientes (s_{i0}) define la aberración esférica y astigmática del frente de onda local saliente y el segundo juego primario de coeficientes (e_{iok}) otra aberración de orden superior $(k > 2)$ del frente de onda local saliente;
- 35 - una base de datos de modelos de propagación para especificar por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$, que hace que se corresponda un segundo juego primario de coeficientes (e_{ok}) con un segundo juego secundario de coeficientes (e_{pk}) , que define la aberración de orden superior de un frente de onda propagado;
- dispositivo de cálculo de coeficientes secundarios para determinar una aberración de orden superior de un frente de onda local propagado a lo largo de un rayo principal (10) que sale de por lo menos un punto de recorrido (i)
- 40 en función de por lo menos el segundo juego primario de coeficientes (e_{iok}) mediante la función especificada $e_{pk} = f(e_{ok})$; y
- dispositivos de cálculo y optimización concebidos para calcular u optimizar por lo menos una superficie del cristal de gafa teniendo en cuenta la aberración de orden superior calculada del frente de onda local propagado.

- 45 Además, la invención ofrece un producto de programa informático concebido, cuando se carga y se ejecuta sobre un ordenador para ejecutar un procedimiento para el cálculo o la optimización del cristal de gafa según la presente invención, en particular en una forma preferida de realización.

Además, la invención ofrece un soporte de datos con un programa informático, donde el programa informático está concebido, cuando se carga y se ejecuta sobre un ordenador, para ejecutar un programa de cálculo o de

optimización de un cristal de gafa según la presente invención, particularmente en una forma de realización preferida.

Además la invención ofrece un procedimiento para la fabricación de un cristal de gafa, que comprende:

- 5 cálculo u optimización de un cristal de gafa según el procedimiento para calcular u optimizar el cristal de gafa según la presente invención, y en particular en una forma de realización preferida;
 fabricación del cristal de gafa así calculado u optimizado.

Además, la invención ofrece un dispositivo para la fabricación de un cristal de gafa que comprende:

- 10 dispositivos de cálculo o de optimización concebidos para calcular u optimizar el cristal de gafa según un procedimiento para el cálculo o la optimización de un cristal de gafa según la presente invención, particularmente en una forma de realización preferida:
 dispositivos de elaboración concebidos para elaborar completamente el cristal de gafa.

15 Además, la invención ofrece la utilización de un cristal de gafa fabricado según el procedimiento de fabricación de la presente invención, en particular en una forma de realización preferida, en una posición de uso individual o especificada (media) del cristal de gafa delante de los ojos de un usuario determinado para corregir una ametropía del usuario de la gafa.

A continuación se explican, a modo de ejemplo, unas formas de realización preferida de la invención con referencia a las figuras adjuntas.

- La Fig. 1 ofrece una representación esquemática de un modelo fisiológico y físico de un cristal de gafa junto con un recorrido del rayo en una posición de uso especificada;
 20 La Fig. 2 ofrece una representación esquemática de un sistema de coordenadas con un frente de onda inicial y un frente de onda propagado;
 La Fig. 3 ofrece una representación esquemática de un frente de onda esférico con una distancia de vergencia s_0 en una distancia de un frente de onda propagado con la distancia de vergencia s_p ;
 La Fig. 4 ofrece una representación esquemática del proceso de propagación de un frente de onda;
 25 La Fig. 5 ofrece una representación esquemática de sistemas de coordenadas locales de una superficie refringente, un frente de onda entrante y un frente de onda saliente; y
 La Fig. 6 ofrece un diagrama de flujo para visualizar un procedimiento para la optimización de un cristal de gafa individual según un ejemplo de realización de la invención.

30 La Fig. 1 muestra una representación esquemática del modelo fisiológico y físico de un cristal de gafa en una posición de uso especificada junto con un recorrido, a modo de ejemplo, de un rayo sobre la base de un cálculo y/o una optimización individual del cristal de gafa según una forma de realización de la invención.

De este modo sólo se calcula un rayo, de preferencia, por punto de recorrido de la vista (punto visual) del cristal de gafa (el rayo principal 10), pero que acompaña también las derivadas de las flechas de arco del frente de onda en las coordenadas transversales (verticales al rayo principal). Estas derivadas se tienen en cuenta hasta el orden deseado, donde las segundas derivadas describen las propiedades de curvatura locales del frente de onda y las derivadas superiores están relacionadas con las aberraciones de orden superior.

En el cálculo de la luz a través del cristal de gafa se determinan al fin y al cabo las derivadas locales de los frentes de ondas en una posición adecuada en el recorrido del rayo, para compararla allí con los valores necesarios de la refracción del usuario de la gafa. En una forma de realización preferida, esta posición es por ejemplo el globo cenital vértice o la pupila de entrada del ojo dócil. Se supone aquí que un frente de onda esférico sale del punto del objeto y se propaga hasta la primera superficie del cristal de gafa 14. Aquí se refracta y a continuación se propaga (ST2) hasta la segunda superficie del cristal de gafa 16, donde se vuelve a refractar. Si se tienen en cuenta otras superficies se prosigue el cambio de propagación y refracción hasta haber pasado la última superficie límite, y la última propagación (ST4) se realiza desde esta última superficie límite hasta el globo cenital vértice (o la pupila de entrada del ojo).
 45

En lo que sigue, se seguirá explicando la propagación del frente de onda según una forma de realización preferida de la presente invención. Estas realizaciones se pueden aplicar por ejemplo a la propagación del frente de onda entre las dos superficies del cristal de gafa y/o sobre la propagación del frente de onda desde la superficie posterior del cristal de gafa hasta el globo cenital vértice.

50 Como se muestra en la Fig. 2, se define de preferencia un sistema de coordenadas cartesianas (con un eje x, un eje y, y un eje z), cuyo origen, con un rayo principal especificado 10 se encuentra en el punto de intersección del rayo principal 10 con el frente de onda inicial 18. El eje z se orienta de preferencia en el sentido del rayo principal 10. Los sentidos del eje x y del eje y se eligen de preferencia, verticales con el eje z y verticales entre sí de forma que el sistema de coordenadas presenta un sistema diestro. Caso de que en el frente de onda inicial se parta del frente de

onda en una superficie refringente, es decir una superficie del cristal de gafa, el eje x y/o el eje y se elige de preferencia paralelo a la superficie o a la tangente a la superficie en el punto de intersección del rayo principal. En otra forma de realización preferida el eje x y el eje y se eligen paralelos a las curvaturas principales del frente de onda inicial 18.

5 De preferencia se parte de una descripción del frente de onda según

(1)

$$w(x, y) = (x, y, w(x, y))$$

donde el valor $w(x, y)$ se representa mediante

(2)

10
$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{a_{m,k-m}}{m!(k-m)!} x^m y^{k-m}$$

por medio de los coeficientes

(3)

$$a_{m,k-m} = \frac{\partial^k}{\partial x^m \partial y^{k-m}} w(x, y) |_{x=0, y=0}$$

Aquí, la relación entre los coeficientes a_{k_x, k_y} y las aberraciones locales E_{k_x, k_y} se describe mediante

15
$$E_{k_x, k_y} = n a_{k_x, k_y}, E_{2,0} = S_{xx} = n a_{2,0}, E_{1,1} = S_{xy} = n a_{1,1}, E_{0,2} = S_{yy} = n a_{0,2}, E_{3,0} = n a_{3,0}$$

Para aberraciones hasta el segundo orden la propagación de un frente de onda esférico con la vergencia $s_0 = n/s_0$ del frente de onda inicial en un entorno de un rayo principal se expresa de preferencia, en la forma conocida, mediante la ecuación de propagación

(4)

20
$$S_p = \frac{1}{1 - \frac{d}{n} S_0} S_0$$

donde $s_p = n/s_p$ designa la vergencia del frente de onda propagado.

Como se puede ver en la Fig. 3, s_0 y s_p designan la distancia del punto de vértice del frente de onda inicial 18 y/o del frente de onda propagado 20 (distancia a lo largo del rayo principal 10 del frente de onda al punto 22 de la imagen). n designa el límite de refracción y d la distancia de propagación.

25 Debido a una ampliación a tres dimensiones se puede representar como sigue la forma esfero-cilíndrica del frente de onda. En primer lugar se identifican las curvaturas $1/s_0$ y $1/s_p$ con las segundas derivadas de las flechas de arco del frente de onda inicial 18 y/o del frente de onda propagado 20. En la representación tridimensional de las segundas derivadas $w_o^{(2,0)} = \partial^2 w_o / \partial x^2$, $w_o^{(1,1)} = \partial^2 w_o / \partial x \partial y$ y $w_o^{(0,2)} = \partial^2 w_o / \partial y^2$ para el frente de onda inicial 18 y para el frente de onda propagado 20 se reúnen en forma de una matriz de vergencia:

30 (5)

$$S_o = \begin{pmatrix} S_{o,xx} & S_{o,xy} \\ S_{o,xy} & S_{o,yy} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_o^{(2,0)} & w_o^{(1,1)} \\ w_o^{(1,1)} & w_o^{(0,2)} \end{pmatrix}, \quad S_p = \begin{pmatrix} S_{p,xx} & S_{p,xy} \\ S_{p,xy} & S_{p,yy} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_p^{(2,0)} & w_p^{(1,1)} \\ w_p^{(1,1)} & w_p^{(0,2)} \end{pmatrix}$$

Donde los componentes de la matriz de vergencia correspondiente relacionados según

(6)

35
$$S_{o,xx} = \left(Sph + \frac{Cyl}{2} \right) - \frac{Cyl}{2} \cos 2\alpha$$

$$S_{o,xy} = -\frac{Cyl}{2} \sin 2\alpha$$

$$S_{o,yy} = \left(Sph + \frac{Cyl}{2} \right) + \frac{Cyl}{2} \cos 2\alpha$$

(y de forma análoga para el frente de onda propagado) con las magnitudes conocidas del efecto esférico Sph , la cuantía Cyl del efecto cilíndrico y la posición axial α del efecto cilíndrico. Por medio de la representación en forma de matriz de vergencia se puede representar de forma análoga a la ecuación (4) la propagación de un frente de onda astigmático mediante la ecuación de propagación generalizada

5 (7)

$$S_p = \frac{1}{1 - \frac{d}{n} S_o} S_o$$

Con La matriz unitaria $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De forma equivalente a esta representación en forma de matriz de vergencia se introduce en el espacio vectorial tridimensional para el frente de onda inicial 18 y el frente de onda propagado 20, como vectores Power:

10 (8)

$$S_o = \begin{pmatrix} S_{oxx} \\ S_{oxy} \\ S_{oyy} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} W_o^{(2,0)} \\ W_o^{(1,1)} \\ W_o^{(0,2)} \end{pmatrix}, \quad S_p = \begin{pmatrix} S_{pxx} \\ S_{pxy} \\ S_{pyy} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} W_p^{(2,0)} \\ W_p^{(1,1)} \\ W_p^{(0,2)} \end{pmatrix}$$

Para tener en cuenta aberraciones de orden superior en la propagación del frente de onda se introducen unos vectores correspondientes e_k de dimensión $k + 1$:

(9)

$$e_{ok} = \begin{pmatrix} E_{oxx...xx} \\ E_{oxx...xy} \\ \vdots \\ E_{oyy...yy} \end{pmatrix} := n \begin{pmatrix} W_o^{(k,0)} \\ W_o^{(k-1,1)} \\ \vdots \\ W_o^{(0,k)} \end{pmatrix}, \quad e_{pk} = \begin{pmatrix} E_{pxx...xx} \\ E_{pxx...xy} \\ \vdots \\ E_{pyy...yy} \end{pmatrix} := n \begin{pmatrix} W_p^{(k,0)} \\ W_p^{(k-1,1)} \\ \vdots \\ W_p^{(0,k)} \end{pmatrix}$$

15 En lo que sigue y a modo de simplificación sólo se explicará la representación bidimensional. Aquí, todo punto sobre el frente de onda inicial ($r = o$) o el frente de onda propagado ($r = p$) se representa por

(10)

$$w_r(y) = \begin{pmatrix} y \\ w_r(y) \end{pmatrix}$$

20 donde $w_r(y)$ se describe mediante:

(11)

$$w_r(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{r,k}}{k!} y^k$$

Los coeficientes $a_{o,k}$ del frente de onda inicial 18 corresponden aquí a las derivadas del frente de onda con $y = 0$:

(12)

$$a_{o,k} = \frac{\partial^k}{\partial y^k} w_o(y)|_{y=0} = w_o^{(k)}(0)$$

25 en dos dimensiones, la matriz de vergencia S_o en la ecuación (5) se reduce a un escalar $E_{o,k} = n w_o^{(k)} = n a_{o,k}$. Para aberraciones de segundo y tercer orden se obtiene entonces por ejemplo $S_o = E_{o,2} = n w_o^{(2)} = n a_{o,2}$, $E_{o,3} = n w_o^{(3)} = n a_{o,3}$, etc. Lo mismo se aplica al frente de onda propagado 20.

30 Cabe señalar que no todo frente de onda en el punto de intersección con un rayo principal 10 está inclinado respecto del eje z. Como el eje z apunta a lo largo de la dirección del rayo principal 10, se encuentra en los puntos de intersección del rayo principal 10 con los frentes de onda 18, 20 verticalmente sobre el frente de onda inicial y el frente de onda propagado. Como además el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el frente de onda inicial 18, se tiene para los coeficientes: $a_{o,0} = 0$, $a_{o,1} = 0$, $a_{p,0} = d$ y $a_{p,1} = 0$.

35 En dos dimensiones se tiene el vector normal $n_w(y)$ para un frente de onda $w(y)$ mediante $n_w(y) = (-w^{(1)}(y), 1)^T / \sqrt{1 + w^{(1)}(y)^2}$, donde $w^{(1)} = \partial w / \partial y$. Para simplificar la escritura se pone primero $v \equiv w^{(1)}$ y se introduce la siguiente función:

(13)

$$n(v) := \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} -v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como derivada $n^{(i)}(0) \equiv \partial^i / \partial v^i n v|_{v=0}$ de esta función se obtiene:

(14)

5 $n(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, n^{(1)}(0) := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, n^{(2)}(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, n^{(3)}(0) := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, n^{(4)}(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}, etc.$

El vector normal vertical al frente de onda inicial 18 así como al frente de onda propagado 20 se designa como n_w . Para la primera derivada del vector normal se obtiene por lo tanto:

(15)

$$\frac{\partial}{\partial y} n_w(y)|_{y=0} \equiv n_w^{(1)}(0) = n^{(1)}(0) w_o^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} w_o^{(2)}(0)$$

10 de forma análoga para las derivadas de orden superior.

Con las aberraciones locales del frente de onda inicial 18 se definen también directamente los coeficientes correspondientes a_k y de forma equivalente las derivadas del frente de onda. A partir de ahí se calcula seguidamente el frente de onda propagado 20 determinando en particular sus derivadas y/o sus coeficientes a_k para todos los órdenes $2 \leq k \leq k_0$ hasta el valor deseado k_0 y calculando de este modo los valores de las aberraciones locales del frente de onda propagado 20.

15

Como punto de partida se considera la siguiente situación con referencia a la Fig. 4. Mientras el rayo principal 10 y el sistema de coordenadas son fijos, un rayo contiguo 24 explora el frente de onda inicial 18 ($\{w_o\}$) y lo alcanza en una sección $y_o \neq 0$. Desde ahí se sigue propagando hacia el frente de onda propagado 20 ($\{w_p\}$). Como se muestra en la Fig. 4 se designa como y_o la proyección del punto de intersección del rayo contiguo 24 con el frente de onda inicial $\{w_o\}$ sobre el eje y mientras que de forma análoga se designa como y_p la proyección del punto de intersección con el frente de onda propagado $\{w_p\}$ sobre el eje y.

20

El vector $w_o = w_o(y_o)$ (véase ecuación (10)) apunta al punto de intersección del rayo contiguo 24 con el frente de onda inicial 18 y la diferencia de marcha óptica (OPD, optical path difference) respecto del frente de onda propagado 20 se designa como τ . Por consiguiente el vector se representa desde el frente de onda inicial 18 hasta la superficie propagada 20 en que $\tau / n n_w$. Se obtiene entonces para el vector al punto correspondiente del frente de onda propagado: $w_p = w_o + \tau / n n_w$. Se introduce por lo tanto como ecuación básica:

25

(16)

$$\begin{pmatrix} y_o \\ w_o(y_o) \end{pmatrix} + \frac{\tau}{n} n_w = \begin{pmatrix} y_p \\ w_p(y_p) \end{pmatrix}$$

De esta ecuación se deduce entonces las relaciones deseadas orden por orden. Aquí se utiliza de preferencia y_p como variable libre, de la cual depende a su vez y_o . Para resolver la ecuación se puede introducir primer el vector

30

(17)

$$p(y_p) = \begin{pmatrix} y_o(y_p) \\ w_p(y_p) \end{pmatrix}$$

bajo la condición marginal $p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau/n \end{pmatrix}$. Para la consideración ulterior y partiendo de lo anterior se introduce la siguiente función:

35

(18)

$$f(p, y_p) = \begin{pmatrix} y_o + \frac{\tau}{n} n_{w,y} (w_o^{(1)}(y_o)) - y_p \\ w_o(y_o) + \frac{\tau}{n} n_{w,z} (w_o^{(1)}(y_o)) - w_p \end{pmatrix}$$

donde $(p_1, p_2) = (y_o, w_p)$ son los componentes de p. Si se pone ahora $p = p(y_p)$, la ecuación (16) se puede representar de forma más compacta mediante:

(19)

$$f(p(y_p), y_p) = 0$$

Las derivadas de esta función según y_p se expresan de preferencia mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

5 (20)

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial p_j} p_j^1(y_p) + \frac{\partial f_i}{\partial y_p} = 0, \quad i = 1, 2$$

donde la matriz con los elementos $A_{ij} := \partial f_i / \partial p_j$, de nombre Matriz de Jacobi A. Por lo tanto la Matriz de Jacobi A es la siguiente

(21)

$$A := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_o} & \frac{\partial f_1}{\partial w_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_o} & \frac{\partial f_2}{\partial w_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\tau}{n} n_{w,y}^{(1)} w_o^{(2)} & 0 \\ w_o^{(1)} + \frac{\tau}{n} n_{w,z}^{(1)} w_o^{(2)} & -1 \end{pmatrix}$$

10

Las expresiones que aparecen en esta ecuación se tienen que entender como $w_o^{(1)} \equiv w_o^{(1)}(y_o)$,

$w_o^{(2)} \equiv w_o^{(2)}(y_o)$, $n_{w,y} \equiv n_{w,y}(w_o^{(1)}(y_o))$, $n_{w,z}^{(1)} \equiv n_{w,z}^{(1)}(w_o^{(1)}(y_o))$, etc., donde y_o, w_p son también funciones de y_p .

El vector derivado $\partial f_i / \partial y_p$ se puede resumir como

(22)

$$b := - \frac{\partial f}{\partial y_p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

15

De este modo, el sistema de ecuaciones diferenciales anterior se puede representar mediante:

$$(23) \quad A(p(y_p)) p^{(1)}(y_p) = b$$

Formalmente, esta ecuación se resuelve mediante:

(24)

20

$$p^{(1)}(y_p) = A(p(y_p))^{-1} b$$

con la condición marginal $p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau/n \end{pmatrix}$. Partiendo de lo anterior se resuelve de forma recursiva como se indica a continuación el sistema de ecuaciones para aberraciones de orden superior:

(25)

$$p^{(1)}(0) = A^{-1} b$$

25

$$p^{(2)}(0) = (A^{-1})^{(1)} b$$

...

$$p^{(k)}(0) = (A^{-1})^{(k-1)} b,$$

donde se tiene, abreviado $A^{-1} = A(p(0))^{-1} = A(0)^{-1}$, $(A^{-1})^{(1)} = \frac{d}{dy_p} A(p(y_p))^{-1} \Big|_{y_p=0}$, ...

$$(A^{-1})^{(k-1)} = \frac{d^{k-1}}{dy_p^{k-1}} A(p(y_p))^{-1} \Big|_{y_p=0}.$$

30

En una fórmula alternativa se propone proceder a la recurrencia partiendo de la ecuación (23) en lugar de la ecuación (24). Las primeras derivadas $(k-1)$ de la ecuación (23) dan como resultado:

(26)

$$A p^{(1)}(0) = b \quad (a)$$

$$A^{(1)}p^{(1)}(0) + Ap^{(2)}(0) = \mathbf{0} \quad (b)$$

$$A^{(2)}p^{(1)}(0) + 2A^{(1)}p^{(2)}(0) + Ap^{(3)}(0) = \mathbf{0} \quad (c)$$

...

$$\sum_{j=1}^k \binom{k-1}{j-1} A^{(k-j)} p^{(j)}(0) = \mathbf{0}, \quad k \geq 2 \quad (d)$$

5 donde $A = A(p(0)) = A(0)$, $A^{(1)} = \frac{d}{dy_p} A(p(y_p)) \big|_{y_p=0}$, ... $A^{(k-j)} = \frac{d^{k-j}}{dy_p^{k-j}} A(p(y_p)) \big|_{y_p=0}$ representan las derivadas totales de la función. Formalmente estas ecuaciones se resuelven mediante:

(27)

$$p^{(1)}(0) = A^{-1}b, \quad k = 1$$

$$p^{(k)}(0) = -A^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j-1} A^{(k-j)} p^{(j)}(0), \quad k \geq 2$$

10 Para obtener $A(0)^{-1}$ se analiza de preferencia la ecuación (21) para $p = 0$ y se aplica la ecuación (14). Esto conduce a:

(28)

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\tau}{n} w_o^{(2)} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

obteniéndose para $p^{(1)}(0)$:

15 (29)

$$p^{(1)}(0) = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto significa a su vez $y_o^{(1)}(0) = \left(\frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} \right)$ y $w_p^{(1)}(0) = 0$ para órdenes $k \geq 2$ se aplica de preferencia la ecuación (27). La derivada $A^{(1)} = \frac{d}{dy_p} A(p(y_p)) \big|_{y_p=0}$, etc. se calculan a partir de la ecuación (21) y se vuelve a aplicar de preferencia la ecuación (14). De este modo se obtiene en el segundo orden:

20 (30)

$$w_p^{(2)} = \frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} w_o^{(2)}$$

lo cual corresponde básicamente a la ecuación de propagación ya indicada anteriormente. Los órdenes superiores se pueden expresar de forma análoga mediante:

(31)

25
$$w_p^{(3)} = \left(\frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} \right)^3 w_o^{(3)}$$

$$w_p^{(4)} = \left(\frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} \right)^4 \left(w_o^{(4)} + 3 \frac{\tau}{n} \left(\frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} w_o^{(3)2} - w_o^{(2)4} \right) \right)$$

$$w_p^{(5)} = \left(\frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} \right)^5 \left(w_o^{(5)} + 5 \frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} \frac{\tau}{n} w_o^{(3)} \left(2w_o^{(4)} + 3 \frac{1}{1 - \tau/n w_o^{(2)}} \frac{\tau}{n} w_o^{(3)2} - 6w_o^{(2)3} \right) \right)$$

...

La ecuación (31) es válida respectivamente para las derivadas y los coeficientes $\alpha_{o,k}$ y $\alpha_{p,k}$ en virtud de las ecuaciones (10) a (12). Si se sustituye ahora $d = \tau/n$ y $\beta = \frac{1}{1 - \frac{d}{n} S_o}$, las aberraciones locales se pueden expresar del siguiente modo:

(32)

5 $S_p = \beta S_o$

$$E_{p,3} = \beta^3 E_{o,3}$$

$$E_{p,4} = \beta^4 \left(E_{o,4} + 3 \frac{d}{n} \left(\beta E_{o,3}^2 - \frac{S_o^4}{n^2} \right) \right)$$

$$E_{p,5} = \beta^5 \left(E_{o,5} + 5\beta \frac{d}{n} E_{o,3} \left(2E_{o,4} + 3\beta \frac{d}{n} E_{o,3}^2 - 6 \frac{S_o^3}{n^2} \right) \right)$$

$$E_{p,6} = \beta^6 \left(E_{o,6} + 5\beta \frac{d}{n} \left(3E_{o,3} E_{o,5} + 21\beta \frac{d}{n} E_{o,3}^2 E_{o,4} - 12 \frac{S_o^3 E_{o,4}}{n^2} + 2E_{o,4}^2 - 9\beta S_o^2 E_{o,3}^2 \frac{3 + 4 \frac{d}{n} S_o}{n^2} + 21 \left(\beta \frac{d}{n} \right)^2 E_{o,3}^4 + 9S_o^6 \frac{1 + \frac{d}{n} S_o}{n^4} \right) \right)$$

10 Esto se generaliza para $2 < k \leq 6$ de preferencia mediante

(33)

$$E_{p,k} = \beta^k (E_{o,k} + R_k)$$

donde en R_k todas las derivadas del frente de onda $E_{o,j}$ de órdenes inferiores ($j < k$) se expresan en forma de aberraciones locales.

15 Aunque una representación tridimensional resulta más laboriosa, puede entenderse en principio de forma análoga a la representación bidimensional. Por esta razón, en lo que sigue sólo se darán algunas consideraciones intermedias esenciales para la representación tridimensional completa.

De preferencia el frente de onda inicial se puede expresar inicialmente mediante el vector 3D

(34)

20 $w_o(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w_o(x, y) \end{pmatrix}$

donde $w_o(x, y)$ se da según la ecuación (2) y se da la relación entre los coeficientes y las derivadas según la ecuación (3). La relación entre los coeficientes y las aberraciones locales se debe a la multiplicación de los coeficientes por el índice de refracción. De preferencia se introducen vectores normales de forma análoga a la ecuación (13):

25 (35)

$$n(u, v) := \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix}$$

de forma que los vectores normales a una superficie $w(x, y) := (x, y, w(x, y))^T$ vienen dados por:

$$\frac{w^{(1,0)} \times w^{(0,1)}}{|w^{(1,0)} \times w^{(0,1)}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + w^{(1,0)^2} + w^{(0,1)^2}}} \begin{pmatrix} -w^{(1,0)} \\ -w^{(0,1)} \\ 1 \end{pmatrix} = n(w^{(1,0)}, w^{(0,1)}) = n(\nabla w)$$

30 En el punto de intersección se tiene por lo tanto $n_w(0, 0) = (0, 0, 1)^T$ y las derivadas correspondientes a la ecuación (14) se calculan de preferencia a partir de la ecuación (35).

Como punto de partida para la consideración de una relación entre el frente de onda inicial y el propagado se recurre de preferencia en lo esencial a la ecuación (16) con la diferencia de que se consideran simultáneamente los componentes x e y . Como vector de funciones desconocidas se especifica de preferencia:

(36)

$$\mathbf{p}(x_p, y_p) = \begin{pmatrix} x_o(x_p, y_p) \\ y_o(x_p, y_p) \\ w_p(x_p, y_p) \end{pmatrix}$$

y análogamente a lo que ocurre en la ecuación (16) se aplica de preferencia para la consideración tridimensional:

(37)

5 $f(\mathbf{p}(x_p, y_p), x_p, y_p) = 0$

donde **f** es análoga a la ecuación (18).

Una diferencia importante respecto de la consideración bidimensional es que en el caso tridimensional existen dos argumentos, respecto de los cuales se tiene en cuenta la derivada. Por consiguiente y particularmente ya en primer orden se consideran dos ecuaciones:

10 (38)

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}(x_p, y_p))\mathbf{p}^{(1,0)}(x_p, y_p) = \mathbf{b}_x$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}(x_p, y_p))\mathbf{p}^{(0,1)}(x_p, y_p) = \mathbf{b}_y$$

donde las desigualdades se describen mediante los vectores de columna (Spaltenvektoren):

(39)

15
$$\mathbf{b}_x = -\frac{\partial f}{\partial x_p} = (1 \ 0 \ 0)^T, \mathbf{b}_y = -\frac{\partial f}{\partial y_p} = (0 \ 1 \ 0)^T$$

La Matriz de Jacobi $\mathbf{A}(\mathbf{p}(x_p, y_p))$ con los elementos $A_{ij} := \partial f_i / \partial p_j$ es la misma para las dos ecuaciones y análoga a la ecuación (21) aunque en la magnitud 3x3.

(40)

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}(x_p, y_p)) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\tau}{n}(n_{w,x}^{(0,1)} w_o^{(1,1)} + n_{w,x}^{(1,0)} w_o^{(2,0)}) & \frac{\tau}{n}(n_{w,x}^{(0,1)} w_o^{(0,2)} + n_{w,x}^{(1,0)} w_o^{(1,1)}) & 0 \\ \frac{\tau}{n}(n_{w,y}^{(0,1)} w_o^{(1,1)} + n_{w,y}^{(1,0)} w_o^{(2,0)}) & 1 + \frac{\tau}{n}(n_{w,y}^{(0,1)} w_o^{(0,2)} + n_{w,y}^{(1,0)} w_o^{(1,1)}) & 0 \\ w_o^{(1,0)} + \frac{\tau}{n}(n_{w,z}^{(0,1)} w_o^{(1,1)} + n_{w,z}^{(1,0)} w_o^{(2,0)}) & w_o^{(0,1)} + \frac{\tau}{n}(n_{w,z}^{(0,1)} w_o^{(0,2)} + n_{w,z}^{(1,0)} w_o^{(1,1)}) & -1 \end{pmatrix}$$

20 Las soluciones directas, análogas a la ecuación (25) vienen dadas por

(41)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(1,0)}(0,0) &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{p}^{(0,1)}(0,0) &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_y \\ \mathbf{p}^{(2,0)}(0,0) &= (\mathbf{A}^{-1})^{(1,0)} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{p}^{(1,1)}(0,0) &= (\mathbf{A}^{-1})^{(0,1)} \mathbf{b}_x = (\mathbf{A}^{-1})^{(1,0)} \mathbf{b}_y \\ \mathbf{p}^{(0,2)}(0,0) &= (\mathbf{A}^{-1})^{(0,1)} \mathbf{b}_y \\ &\dots \\ \mathbf{p}^{(k_x, k_y)}(0,0) &= \begin{cases} (\mathbf{A}^{-1})^{(k_x, -1, 0)} \mathbf{b}_x & , k_x \neq 0, k_y = 0 \\ (\mathbf{A}^{-1})^{(k_x - 1, k_y)} \mathbf{b}_x = (\mathbf{A}^{-1})^{(k_x, k_y - 1)} \mathbf{b}_y & , k_x \neq 0, k_y \neq 0 \\ (\mathbf{A}^{-1})^{(0, k_y - 1)} \mathbf{b}_y & , k_x = 0, k_y \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{p}(0,0))^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{0})^{-1}, (\mathbf{A}^{-1})^{(1,0)} = \frac{d}{dx_p} \mathbf{A}(\mathbf{p}(x_p, y_p))^{-1} \Big|_{x_p=0, y_p=0}, \dots$

$$(A^{-1})^{(k_x, k_y)} = \frac{d^k x d^k y}{d^k x_p d^k y_p} A(\mathbf{p}(x_p, y_p))^{-1} \Big|_{x_p=0, y_p=0}, \text{ etc.}$$

De forma análoga a las ecuaciones (28) y (29) en la consideración tridimensional se tiene:

(42)

$$A(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 - \gamma/n w_o^{(2,0)} & -\gamma/n w_o^{(1,1)} & 0 \\ -\gamma/n w_o^{(1,1)} & 1 - \gamma/n w_o^{(0,2)} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(\mathbf{0})^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 - \gamma/n w_o^{(0,2)} & \gamma/n w_o^{(1,1)} \\ \gamma/n w_o^{(1,1)} & 1 - \gamma/n w_o^{(2,0)} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5 con

$$\gamma = \frac{-1}{\det(A(\mathbf{0}))} = \frac{1}{1 - \gamma/n w_o^{(2,0)} - (\gamma/n w_o^{(1,1)})^2 - \gamma/n w_o^{(0,2)} + (\gamma/n)^2 w_o^{(2,0)} w_o^{(0,2)}}$$

y después de aplicar las ecuaciones (39) y (41), las soluciones

(43)

$$\mathbf{p}^{(1,0)}(0,0) = \gamma \begin{pmatrix} n(n - \tau w_o^{(0,2)}) \\ n \tau w_o^{(1,1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(0,1)}(0,0) = \gamma \begin{pmatrix} n \tau w_o^{(1,1)} \\ n(n - \tau w_o^{(2,0)}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

10 Siguiendo aplicando las ecuaciones (39) y (41) se obtiene en segundo orden

(44)

$$\begin{aligned} w_p^{(2,0)} &= \gamma \left(\gamma/n (w_o^{(1,1)})^2 + (1 - \gamma/n w_o^{(0,2)}) w_o^{(2,0)} \right) \\ w_p^{(1,1)} &= \gamma w_o^{(1,1)} \\ w_p^{(0,2)} &= \gamma \left(\gamma/n (w_o^{(1,1)})^2 + (1 - \gamma/n w_o^{(2,0)}) w_o^{(0,2)} \right) \end{aligned}$$

En una forma de realización preferida los ejes de coordenadas para determinar la propagación se eligen o determinan de forma que el eje x y el eje y coinciden con los sentidos de las curvaturas principales del frente de onda inicial. De este modo se tiene $w_o^{(1,1)} = 0$, y las ecuaciones (44) se simplifican, obteniendo

15

(45)

$$\begin{aligned} w_p^{(2,0)} &= \frac{1}{1 - \gamma/n w_o^{(2,0)}} w_o^{(2,0)} \\ w_p^{(1,1)} &= 0 \\ w_p^{(0,2)} &= \frac{1}{1 - \gamma/n w_o^{(0,2)}} w_o^{(0,2)} \end{aligned}$$

De forma correspondiente, las ecuaciones de tercer orden se expresan de preferencia del siguiente modo:

(46)

$$w_p^{(3,0)} = \gamma^3 \left((1 - \frac{d}{n} w_0^{(0,2)})^3 w_0^{(3,0)} + \frac{d}{n} w_0^{(1,1)} \left(3(1 - \frac{d}{n} w_0^{(0,2)})^2 w_0^{(2,1)} + \frac{d}{n} w_0^{(1,1)} (\frac{d}{n} w_0^{(0,3)} w_0^{(1,1)}) + 3(1 - \frac{d}{n} w_0^{(0,2)})^2 w_0^{(1,2)} \right) \right)$$

$$w_p^{(2,1)} = \gamma^3 \left(w_0^{(2,1)} + \frac{d}{n} \left(w_0^{(1,1)} (2w_0^{(1,2)} + w_0^{(3,0)}) - (2w_0^{(0,2)} + w_0^{(2,0)}) w_0^{(2,1)} \right) + \left(\frac{d}{n} \right)^2 \left(w_0^{(2,1)} w_0^{(0,2)^2} - 2(w_0^{(1,1)} (w_0^{(1,2)} + w_0^{(3,0)}) - w_0^{(2,0)} w_0^{(2,1)}) w_0^{(0,2)} + w_0^{(0,3)} w_0^{(1,1)^2} + 2w_0^{(1,1)} (w_0^{(1,1)} w_0^{(2,1)} - w_0^{(1,2)} w_0^{(2,0)}) \right) + \left(\frac{d}{n} \right)^3 \left(w_0^{(1,2)} w_0^{(1,1)^3} - (w_0^{(0,3)} w_0^{(2,0)} + 2w_0^{(0,2)} w_0^{(2,1)}) w_0^{(1,1)^2} + w_0^{(0,2)} (2w_0^{(1,2)} w_0^{(2,0)} + w_0^{(0,2)} w_0^{(3,0)}) w_0^{(1,1)} - w_0^{(0,2)^2} w_0^{(2,0)} w_0^{(2,1)} \right) \right)$$

$$w_p^{(1,2)} = \gamma^3 \left(w_0^{(1,2)} + \frac{d}{n} \left(w_0^{(1,1)} (2w_0^{(2,1)} + w_0^{(0,3)}) - (2w_0^{(2,0)} + w_0^{(0,2)}) w_0^{(1,2)} \right) + \left(\frac{d}{n} \right)^2 \left(w_0^{(1,2)} w_0^{(2,0)^2} - 2(w_0^{(1,1)} (w_0^{(2,1)} + w_0^{(0,3)}) - w_0^{(0,2)} w_0^{(1,2)}) w_0^{(2,0)} + w_0^{(3,0)} w_0^{(1,1)^2} + 2w_0^{(1,1)} (w_0^{(1,1)} w_0^{(1,2)} - w_0^{(2,1)} w_0^{(0,2)}) \right) + \left(\frac{d}{n} \right)^3 \left(w_0^{(2,1)} w_0^{(1,1)^3} - (w_0^{(3,0)} w_0^{(0,2)} + 2w_0^{(2,0)} w_0^{(1,2)}) w_0^{(1,1)^2} + w_0^{(2,0)} (2w_0^{(2,1)} w_0^{(0,2)} + w_0^{(2,0)} w_0^{(0,3)}) w_0^{(1,1)} - w_0^{(2,0)^2} w_0^{(0,2)} w_0^{(1,2)} \right) \right)$$

$$w_p^{(0,3)} = \gamma^3 \left((1 - \frac{d}{n} w_0^{(2,0)})^3 w_0^{(0,3)} + \frac{d}{n} w_0^{(1,1)} \left(3(1 - \frac{d}{n} w_0^{(2,0)})^2 w_0^{(1,2)} + \frac{d}{n} w_0^{(1,1)} (\frac{d}{n} w_0^{(3,0)} w_0^{(1,1)}) + 3(1 - \frac{d}{n} w_0^{(2,0)})^2 w_0^{(2,1)} \right) \right)$$

Si se sustituye ahora $d = \tau/n$ y $\gamma = \frac{1}{1 - \frac{d}{n} S_{xxx} - (\frac{d}{n} S_{oxy})^2 - \frac{d}{n} S_{yyy} + (\frac{d}{n})^2 S_{xxx} S_{yyy}}$, la propagación del frente de onda de segundo orden se puede expresar en forma de aberraciones locales del siguiente modo:

(47)

$$S_p = \gamma \left(S_o + \frac{d}{n} \begin{pmatrix} S_{oxy}^2 - S_{xxx} S_{yyy} \\ 0 \\ S_{oxy}^2 - S_{xxx} S_{yyy} \end{pmatrix} \right)$$

5

Si se sustituye además $\beta_x = \frac{1}{1 - \frac{d}{n} S_{xxx}}$ y $\beta_y = \frac{1}{1 - \frac{d}{n} S_{yyy}}$, la propagación del frente de onda de tercer orden se puede escribir mediante:

(48)

$$e_{p3} = \gamma^3 \begin{pmatrix} \beta^{-3} & 3\beta_y^{-2} \frac{d}{n} S_{xy} & 3\beta_y^{-1} (\frac{d}{n} S_{xy})^2 & (\frac{d}{n} S_{xy})^3 \\ \beta_y^{-2} \frac{d}{n} S_{xy} & \beta_y^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} + 3(\frac{d}{n} S_{xy})^2 \right) & 2/\gamma \frac{d}{n} S_{xy} + 3(\frac{d}{n} S_{xy})^3 & \beta_x^{-1} (\frac{d}{n} S_{xy})^2 \\ \beta_y^{-1} (\frac{d}{n} S_{xy})^2 & 2/\gamma \frac{d}{n} S_{xy} + 3(\frac{d}{n} S_{xy})^3 & \beta_x^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} + 3(\frac{d}{n} S_{xy})^2 \right) & \beta_x^{-2} \frac{d}{n} S_{xy} \\ (\frac{d}{n} S_{xy})^3 & 3\beta_x^{-1} (\frac{d}{n} S_{xy})^2 & 3\beta_x^{-2} \frac{d}{n} S_{xy} & \beta_x^{-3} \end{pmatrix} e_{o3}$$

10 En una forma de realización preferida se eligen o determinan los ejes de coordenadas para determinar la propagación de forma que el eje x y el eje y coinciden con los sentidos de las curvaturas principales del frente de onda inicial. De esta forma se simplifican las ecuaciones (47) y (48), obteniéndose

(49)

$$s_p = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_y \end{pmatrix} s_o$$

15 (50)

$$e_{p3} = \begin{pmatrix} \beta_x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_x^2 \beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_x \beta_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_y^3 \end{pmatrix} e_{o3}$$

También la propagación de las aberraciones de cuarto orden se puede determinar de forma comparativa sencilla mediante:

(51)

$$e_{p4} = \begin{pmatrix} \beta_x^4 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \beta_x^3 \beta_y & \dots & \vdots \\ \vdots & \beta_x^2 \beta_y^2 & \beta_x \beta_y^3 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \beta_y^4 \end{pmatrix}$$

$$e_{o4} + \frac{d}{n} \begin{pmatrix} 3 \left(\beta_x E_{oxxx}^2 + \beta_y E_{oaxy}^2 - \frac{S_{oxx}^4}{n^2} \right) \\ 3E_{oaxy} (\beta_x E_{oxxx} + \beta_y E_{oayy}) \\ \beta_x (2E_{oaxy}^2 + E_{oxxx} E_{oayy}) + \beta_y (2E_{oayy}^2 + E_{oaxy} E_{oyyy}) - \left(\frac{S_{oxx} S_{oyy}}{n} \right)^2 \\ 3E_{oayy} (\beta_x E_{oaxy} + \beta_y E_{oyyy}) \\ 3 \left(\beta_x E_{oayy}^2 + \beta_y E_{oyyy}^2 - \frac{S_{oyy}^4}{n^2} \right) \end{pmatrix}$$

Esto se generaliza para $2 < k \leq 4$ de preferencia mediante

(52)

$$e_{pk} = B_k (e_{ok} + r_k)$$

10 (53)

$$B_k = \begin{pmatrix} \beta_x^k & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \beta_x^{k-1} \beta_y & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \beta_x \beta_y^{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & \beta_y^k \end{pmatrix}$$

donde r_k representa un vector en el que, de forma análoga a R_k en la ecuación (33) están contenidos todos los términos restantes $R_{k_x k_y}$.

En otra forma de realización preferida se tiene:

15 (54)

$$\begin{aligned} s_p &= T^{(2)}(\hat{R}) \Gamma^{(2)}(\hat{\beta}) \hat{s}_p S(\hat{R}) \\ e_{p3} &= T^{(3)}(\hat{R}) \Gamma^{(3)}(\hat{\beta}) \hat{e}_{p3} S(\hat{R}) \\ e_{p4} &= T^{(4)}(\hat{R}) \Gamma^{(4)}(\hat{\beta}) \hat{e}_{p4} S(\hat{R}) \\ &etc. \end{aligned}$$

donde $s_p, e_{p3}, e_{p4}, \dots$ son válidos en cualquier sistema de coordenadas y donde

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{xx} & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_{yy} \end{pmatrix}$$

con

$$\hat{\beta}_{xx} = \left(1 - \frac{\tau}{n} \hat{w}^{(2,0)}\right)^{-1}$$

$$\hat{\beta}_{yy} = \left(1 - \frac{\tau}{n} \hat{w}^{(0,2)}\right)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{w}^{(2,0)} \\ \hat{w}^{(1,1)} \\ \hat{w}^{(0,2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (w^{(2,0)} + w^{(0,2)}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (w^{(2,0)} - w^{(0,2)}) \sqrt{1 + \left(\frac{2w^{(1,1)}}{w^{(2,0)} - w^{(0,2)}}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz auxiliar que puede reducir a la matriz

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{xx} & \beta_{xy} \\ \beta_{xy} & \beta_{yy} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{1} - \frac{\tau}{n} \begin{pmatrix} w_o^{(2,0)} & w_o^{(1,1)} \\ w_o^{(1,1)} & w_o^{(0,2)} \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

mediante

$$\hat{\beta} = \hat{R} \beta \hat{R}^{-1}$$

5 donde

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación desde el sistema especial en el que el eje x y el eje y coinciden con los sentidos de las curvaturas principales del frente de onda inicial, se transforma en el sistema general. Aquí se tiene

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\beta_{xy}}{\beta_{yy} - \beta_{xx}}$$

10 Además en la ecuación (54) se utiliza la matriz

$$s(\hat{R}) = \begin{pmatrix} \hat{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

y además en la ecuación (54) $\mathbf{T}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)}$, $\mathbf{T}^{(3)}$, $\mathbf{T}^{(4)}$ son funciones con un valor de matriz que se asignan a una matriz dada

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

15 las matrices

$$\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac & c^2 \\ ab & ad+bc & cd \\ b^2 & 2bd & d^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(3)}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2c & 3ac^2 & c^3 \\ a^2b & a(ad+2bc) & c(2ad+bc) & c^2d \\ ab^2 & b(2ad+bc) & d(ad+2bc) & cd^2 \\ b^3 & 3b^2d & 3bd^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{(4)}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3c & 6a^2c^2 & 4ac^3 & c^4 \\ a^3b & a^2(3bc+ad) & 3ac(bc+ad) & c^2(bc+3ad) & c^3d \\ a^2b^2 & 2ab(bc+ad) & b^2c^2+4abcd+a^2d^2 & 2cd(bc+ad) & c^2d^2 \\ ab^3 & b^2(bc+3ad) & 3bd(bc+ad) & d^2(3bc+ad) & cd^3 \\ b^4 & 4b^3d & 6b^2d^2 & 4bd^3 & d^4 \end{pmatrix}$$

para órdenes superiores se pueden definir matrices $\mathbf{T}^{(n)}$ con $n > 4$. Finalmente para el orden $n = 2$

$$\hat{\mathbf{s}}_p = \begin{pmatrix} \hat{w}_p^{(2,0)} \\ \hat{w}_p^{(1,1)} \\ \hat{w}_p^{(0,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11}^{-1} \hat{w}_o^{(2,0)} \\ 0 \\ \hat{\beta}_{22}^{-1} \hat{w}_o^{(0,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}_o^{(2,0)} \\ 0 \\ \hat{w}_o^{(0,2)} \end{pmatrix} - \frac{\tau}{n} \begin{pmatrix} \hat{w}_o^{(2,0)^2} \\ 0 \\ \hat{w}_o^{(0,2)^2} \end{pmatrix}$$

para el orden $n = 2$

$$\hat{\mathbf{e}}_{p,3} = \begin{pmatrix} \hat{w}_p^{(3,0)} \\ \hat{w}_p^{(2,1)} \\ \hat{w}_p^{(1,2)} \\ \hat{w}_p^{(0,3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}_o^{(3,0)} \\ \hat{w}_o^{(2,1)} \\ \hat{w}_o^{(1,2)} \\ \hat{w}_o^{(0,3)} \end{pmatrix}$$

5

y para el orden $n = 4$

$$\hat{\mathbf{e}}_{p,4} = \begin{pmatrix} \hat{w}_p^{(4,0)} \\ \hat{w}_p^{(3,1)} \\ \hat{w}_p^{(2,2)} \\ \hat{w}_p^{(1,3)} \\ \hat{w}_p^{(0,4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}_o^{(4,0)} \\ \hat{w}_o^{(3,1)} \\ \hat{w}_o^{(2,2)} \\ \hat{w}_o^{(1,3)} \\ \hat{w}_o^{(0,4)} \end{pmatrix} + \frac{\tau}{n} \begin{pmatrix} 3(\hat{\beta}_{11} \hat{w}_o^{(3,0)^2} + \hat{\beta}_{22} \hat{w}_o^{(2,1)^2} - \hat{w}_o^{(2,0)^4}) \\ 3\hat{w}_o^{(2,1)}(\hat{\beta}_{11} \hat{w}_o^{(3,0)} + \hat{\beta}_{22} \hat{w}_o^{(1,2)}) \\ \hat{w}_o^{(1,2)}(2\hat{\beta}_{11} \hat{w}_o^{(2,1)} + \hat{\beta}_{22} \hat{w}_o^{(0,3)}) - \hat{w}_o^{(2,0)^2} \hat{w}_o^{(0,2)^2} \\ 3\hat{w}_o^{(1,2)}(\hat{\beta}_{11} \hat{w}_o^{(2,1)} + \hat{\beta}_{22} \hat{w}_o^{(0,3)}) \\ 3(\hat{\beta}_{11} \hat{w}_o^{(1,2)^2} + \hat{\beta}_{22} \hat{w}_o^{(0,3)^2} - \hat{w}_o^{(0,2)^4}) \end{pmatrix}$$

constituyen la expresión de soluciones sobre las cuales, debido a la transformación en la ecuación (54) se pueden formar las soluciones para los frentes de onda propagados.

- 10 En lo que sigue se indica cómo se tiene en cuenta, de forma preferida, las aberraciones de un cristal de gafa en su optimización, describiendo los frentes de onda en sistemas de coordenadas diferentes que rotan los unos respecto de los otros. Como ya se describió con relación a las Fig. 1 y 2 los sistemas de coordenadas se definen de preferencia por los puntos de intersección del rayo principal 10 con la superficie refringente 14, 16, por la superficie refringente y el sentido del rayo principal 10. Con el fin de definir para el proceso de refracción en una superficie refringente un frente de onda entrante, la superficie refringente misma y el frente de onda saliente, se utilizan de preferencia tres sistemas de coordenadas cartesianas locales (x, y, z) , $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ y (x', y', z') . El origen de todos estos sistemas de coordenadas coincide de preferencia con el punto de intersección del rayo principal 10 con la superficie refringente. Mientras los sistemas poseen el sistema de normal respecto del plano de refracción (es decir que el plano se encuentra en el rayo principal entrante y saliente) como eje común $x = x' = \bar{x}$, el eje z apunta a lo largo del rayo principal incidente, el eje z' a lo largo del rayo principal saliente y el eje \bar{z} a lo largo de la normal de la superficie refringente. La orientación de los ejes se elige de preferencia de forma que cada sistema sea diestro (véase Fig. 5).

20

En la transición entre los sistemas de coordenadas las magnitudes vectoriales v dependen entre sí mediante las siguientes relaciones

(55)

$$v = R(\varepsilon)\bar{v}, \quad v' = R(\varepsilon')\bar{v}$$

5 donde R corresponde a las rotaciones alrededor del eje común x y se define por la matriz de rotación tridimensional

(56)

$$R(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\operatorname{sen} \varepsilon \\ 0 & \operatorname{sen} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

En una rotación del sistema de coordenadas un ángulo α alrededor del eje z la transformación de las coordenadas viene descrita por

10 (57)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \\ \bar{y} &= x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con la matriz de rotación

(58)

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

15 De este modo, el frente de onda \tilde{w} en el sistema de coordenadas \bar{x}, \bar{y} se define mediante

(59)

$$\tilde{w}(\bar{x}, \bar{y}) = w(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y}))$$

Si se desvía el frente de onda \tilde{w} hacia \bar{x}, \bar{y} se obtienen los nuevos coeficientes $\tilde{a}_{m,k-m}$ respecto de los coeficientes $a_{m,k-m}$.

20 (60)

$$\tilde{a}_{m,k-m} = \frac{\partial^k}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{y}^{k-m}} w(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) \Big|_{\bar{x}=0, \bar{y}=0}$$

En segundo orden las aberraciones se representan de preferencia mediante el vector

(61)

$$s = \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{yy} \end{pmatrix}$$

25 cuando se hace girar el sistema de coordenadas un ángulo α , las nuevas aberraciones \tilde{s} de segundo orden (en el sistema de coordenadas rotado (\bar{x}, \bar{y})) se calculan por medio de

(62)

$$\tilde{s} = R_2(\alpha)s$$

con

(63)

$$R_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

30

Para órdenes superiores de las aberraciones la dependencia de los nuevos coeficientes $\tilde{a}_{m,k-m}$ respecto de los antiguos coeficientes $a_{m,k-m}$, se expresa de preferencia mediante

(64)

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{00} \\ \tilde{a}_{01} \\ \tilde{a}_{10} \\ \tilde{a}_{02} \\ \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{20} \\ \tilde{a}_{03} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{rot}(N, \alpha) \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{02} \\ a_{11} \\ a_{20} \\ a_{03} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación resultante presenta la estructura de bloque que muestra que los coeficientes $\tilde{a}_{m,k-m}$ de orden k sólo dependen de coeficientes $a_{m,k-m}$ del mismo orden k . La matriz de rotación para los primeros 15 coeficientes ($N = 15$) hasta el orden ($k = 4$) es por consiguiente

5 (65)

$$\mathbf{R}_{rot}(15, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_1(\alpha) & & \vdots \\ & & \mathbf{R}_2(\alpha) & \\ \vdots & & & \mathbf{R}_3(\alpha) & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \mathbf{R}_4(\alpha) \end{pmatrix}$$

Los elementos matriciales de las estructuras de bloque $\mathbf{R}_k(\alpha)$ de primer orden ($k = 1$) dan como resultado la conocida matriz de rotación

(66)

10 $\mathbf{R}_1(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

en segundo orden ($k = 2$) la matriz de rotación es

(67)

$$\mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

en tercer orden ($k = 3$)

15 (68)

$$\mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^3 \alpha & -3 \cos^2 \alpha \sin \alpha & 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha & \sin^3 \alpha \\ \cos^2 \alpha \sin \alpha & \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha & \sin^3 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin^2 \alpha & -(\sin^3 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha) & \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ \sin^3 \alpha & 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha & 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha & \cos^3 \alpha \end{pmatrix}$$

y en cuarto orden ($k = 4$)

(69)

$$\mathbf{R}_4(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^4 \alpha & -\cos^3 \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin^3 \alpha & \sin^4 \alpha \\ 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha & \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \sin^2 \alpha & 2(\cos \alpha \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha \sin \alpha) & -(\sin^4 \alpha - 3 \cos^2 \sin^2 \alpha) & -4 \cos \alpha \sin^3 \alpha \\ 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha & 3(\cos^3 \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin^3 \alpha) & \cos^4 \alpha - 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha & 3(\cos \alpha \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha \sin \alpha) & 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha & -(\sin^4 \alpha - 3 \cos^2 \sin^2 \alpha) & -2(\cos \alpha \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha \sin \alpha) & \cos^4 \alpha - 3 \cos^2 \sin^2 \alpha & -4 \cos^3 \alpha \sin \alpha \\ \sin^4 \alpha & \cos \alpha \sin^3 \alpha & \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha & \cos^3 \alpha \sin \alpha & \cos^4 \alpha \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones (66) a (69) muestran que los elementos de la matriz de bloque $e_{i,j}(\alpha)$ de la matriz de rotación correspondiente $R_k(\alpha)$ presentan la simetría $e_{i,j}(\alpha) = e_{k+2-i,k+2-j}(-\alpha)$. Con $c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$, se pueden simplificar las matrices de bloque para obtener

(70)

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} c^k s^0 & * \\ c^0 s^k & * \end{pmatrix}$$

$$R_2(\alpha) = \begin{pmatrix} c^k s^0 & * & * \\ kc^1 s^1 & c^2 - s^2 & * \\ c^0 s^k & c^1 s^1 & * \end{pmatrix}$$

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} c^k s^0 & * & * & * \\ kc^{k-1} s^1 & c^k - (k-1)c^1 s^{k-1} & * & * \\ kc^1 s^{k-1} & -s^k + (k-1)c^{k-1} s^1 & * & * \\ c^0 s^k & c^1 s^{k-1} & c^{k-1} s^1 & * \end{pmatrix}$$

$$R_4(\alpha) = \begin{pmatrix} c^k s^0 & * & * & * & * \\ kc^{k-1} s^1 & c^k - (k-1)c^2 s^2 & * & * & * \\ 2(k-1)c^2 s^2 & (k-1)(c^{k-1} s^1 - c^1 s^{k-1}) & c^k - 4c^2 s^2 + s^k & * & * \\ kc^1 s^{k-1} & -s^k + (k-1)c^2 s^2 & 2(c^{k-1} s^1 - c^1 s^{k-1}) & * & * \\ c^0 s^k & c^1 s^{k-1} & c^2 s^2 & c^{k-1} s^1 & * \end{pmatrix}$$

$$R_5(\alpha) = \begin{pmatrix} c^k s^0 & * & * & * & * & * \\ kc^{k-1} s^1 & c^k - (k-1)c^{k-2} s^2 & * & * & * & * \\ 2kc^{k-2} s^2 & (k-1)c^{k-1} s^1 - 2(k-2)c^2 s^{k-2} & c^k - 6c^{k-2} s^2 + 3c^1 s^{k-1} & * & * & * \\ 2kc^2 s^{k-2} & -(k-1)c^1 s^{k-1} + 2(k-2)c^{k-2} s^2 & s^k - 6c^2 s^{k-2} + 3c^{k-1} s^1 & * & * & * \\ kc^1 s^{k-1} & -s^k + (k-1)c^2 s^{k-2} & -2c^1 s^{k-1} + 3c^{k-2} s^2 & 2c^{k-1} s^1 - 3c^2 s^{k-2} & * & * \\ c^0 s^k & c^1 s^{k-1} & c^2 s^{k-2} & c^{k-2} s^2 & c^{k-1} s^1 & * \end{pmatrix}$$

5

En una forma de realización preferida las aberraciones se describen en forma de polinomios de Zernike. La rotación se realiza en este caso en el espacio del polinomio de Zernike. El frente de onda se abre entonces de preferencia con los polinomios de Zernike en coordenadas polares:

(71)

$$\begin{aligned} Z_{0,0}(\rho, \varphi) &= 1 \\ Z_{1,1}(\rho, \varphi) &= 2\rho \cos \varphi \\ Z_{1,-1}(\rho, \varphi) &= 2\rho \sin \varphi \\ Z_{2,0}(\rho, \varphi) &= \sqrt{3}(2\rho^2 - 1) \\ Z_{2,2}(\rho, \varphi) &= \sqrt{6}\rho^2 \cos 2\varphi \\ Z_{2,-2}(\rho, \varphi) &= \sqrt{6}\rho^2 \sin 2\varphi \\ &\vdots \end{aligned}$$

10

con

(72)

$$W(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_m c_{k,m} Z_{k,m}$$

Los coeficientes de Zernike corresponden a un frente de onda $w(x, y)$ se determinan entonces de preferencia por medio de la integral

(73)

$$c_k^m = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_{\text{pupila}} Z_k^m\left(\frac{x}{r_0}, \frac{y}{r_0}\right) w(x, y) dx dy$$

5

donde $r := \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sen \varphi$ y r_0 el tamaño de la pupila.

En la representación preferida mediante polinomio de Zernike en coordenadas polares la rotación para los coeficientes de Zernike se representa de forma muy sencilla. El vector de coeficientes de Zernike es transformado por la rotación

10 (74)

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{00} \\ \tilde{a}_{01} \\ \tilde{a}_{10} \\ \tilde{a}_{02} \\ \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{20} \\ \tilde{a}_{03} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\text{rot}}(N, \alpha) \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{02} \\ a_{11} \\ a_{20} \\ a_{03} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

En una representación de matriz de bloque de la matriz de rotación se basa directamente en la matriz de rotación elemental de la ecuación (57). Para $N = 15$ la matriz de rotación tiene la forma:

(75)

$$\mathbf{R}_{\text{Zernike}}(15, \alpha) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \dots & & & \dots & & & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{R}(\alpha)} & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{1} & & & & & \\ & & & \boxed{\mathbf{R}(2\alpha)} & & & & \\ & & & & \boxed{\mathbf{R}(\alpha)} & & & \\ & & & & & \boxed{\mathbf{R}(3\alpha)} & & \\ & & & & & & \boxed{1} & \\ & & & & & & & \boxed{\mathbf{R}(2\alpha)} & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 & \boxed{\mathbf{R}(4\alpha)} \end{pmatrix}$$

15

Se enmarca aquí la visualización de cada bloque perteneciente al mismo orden radial.

Cuando el frente de onda se representa por medio de una serie como en las ecuaciones (70) y (71), se obtiene también para la integral de la ecuación (72) una representación en serie, es decir una combinación lineal de los coeficientes $a_{m,k-m}$. Si se suman los coeficientes c_k^m o $a_{m,k-m}$ como vectores hasta un orden determinado k se podrá indicar una matriz de transición $T(N)$ entre el sub-espacio de Zernike y el sub-espacio de la serie de Taylor de orden k mediante

20

(76)

$$\begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,-1} \\ c_{2,0} \\ c_{2,2} \\ c_{2,-2} \\ c_{3,1} \\ c_{3,-1} \\ c_{3,3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{T}(N) \begin{pmatrix} E \\ E_x \\ E_y \\ E_{xx} \\ E_{xy} \\ E_{yy} \\ E_{xxx} \\ E_{xxy} \\ \vdots \\ E_{yy\dots y} \end{pmatrix} = n\mathbf{T}(N) \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{02} \\ a_{11} \\ a_{20} \\ a_{03} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

con $T(N) = Z(N) D(N)$, donde por ejemplo para $N = 9$

(77)

$$\mathbf{D}(9) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & & & & & & & \dots & 0 \\ 0 & r_0 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & r_0 & & & & & & & \\ & & & r_0^2 & & & & & & \\ & & & & r_0^2 & & & & & \\ & & & & & r_0^2 & & & & \\ & & & & & & r_0^2 & & & \\ & & & & & & & r_0^3 & & \\ \vdots & & & & & & & & r_0^3 & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & \dots & 0 & r_0^3 \end{pmatrix}$$

5

designa una matriz que indica la potencia correcta del radio de la pupila. La matriz de transformación básica $Z(N)$ se determina por la expansión de Zernike de la serie potencial. De preferencia se tiene para la matriz de transformación para $N = 15$ la siguiente representación:

$$\mathbf{Z}^{-1}(15) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & \vdots & 0 & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & & \\ & & \vdots & 0 & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & & \\ & & & 4\sqrt{3} & -2\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 36\sqrt{2} & 0 & 12\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 12\sqrt{2} & 0 & 12\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 12\sqrt{2} & 0 & -12\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & 0 & 36\sqrt{2} & 0 & -12\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & \vdots & 0 & \vdots & 0 & * & 0 & * & 0 & * & \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots & 0 & * & 0 & * & 0 & \\ & & & & & & & & & & * & 0 & * & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$$

También en esta ecuación los bloques están enmarcados para su visualización en el mismo orden radial. Se puede ver que existen también fuera de los bloques diagonales elementos que no desaparecen. Pero estos no influyen en la matriz de rotación $R_{Pot}(N, \alpha)$.

5 Para determinar la matriz de rotación $R_{Pot}(N, \alpha)$, se transforma $R_{Zernike}(N, \alpha)$ en el sistema de coeficientes del desarrollo de series potenciales con la ecuación (76)

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{00} \\ \tilde{a}_{01} \\ \tilde{a}_{10} \\ \tilde{a}_{02} \\ \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{20} \\ \tilde{a}_{03} \\ \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} = T^{-1}(N) \begin{pmatrix} \tilde{c}_{0,0} \\ \tilde{c}_{1,1} \\ \tilde{c}_{1,-1} \\ \tilde{c}_{2,0} \\ \tilde{c}_{2,2} \\ \tilde{c}_{2,-2} \\ \tilde{c}_{3,1} \\ \tilde{c}_{3,-1} \\ \tilde{c}_{3,3} \\ \vdots \end{pmatrix} = T^{-1}(N) R_{Zernike}(N, \alpha) \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,-1} \\ c_{2,0} \\ c_{2,2} \\ c_{2,-2} \\ c_{3,1} \\ c_{3,-1} \\ c_{3,3} \\ \vdots \end{pmatrix} = T^{-1}(N) R_{Zernike}(N, \alpha) T(N) \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{02} \\ a_{11} \\ a_{20} \\ a_{03} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

De lo anterior se sigue

(78)

$$R_{Pot}(N, \alpha) = T^{-1}(N) R_{Zernike}(N, \alpha) T(N)$$

10 con una estructura de bloque de la forma

(79)

$$R_{Pot}(15) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_1(\alpha) & & \vdots \\ & & R_2(\alpha) & \\ \vdots & & & R_3(\alpha) & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & R_4(\alpha) \end{pmatrix}$$

donde las matrices de bloque son idénticas a las de la ecuación (70).

15 La Fig. 6 muestra, a modo de ejemplo, un procedimiento para la optimización individual de un cristal de gafa teniendo en cuenta aberraciones de orden superior (HOA higher order aberrations), tanto del cristal de gafa como del ojo. En una etapa ST12 se calculan no solamente las aberraciones locales de segundo orden ($S'_{xx}, S'_{xy}, S'_{yy}$) sino también las aberraciones de orden superior ($K'_{xxxx}, K'_{xxyy}, K'_{xyyy}$, etc.) en el globo cenital vértice sobre la base de Tracing de frente de onda (ST10).

20 Estos se retiran de las aberraciones locales y con la ayuda de polinomios de Zernike y/u otra métrica adecuada se calcula de preferencia, teniendo en cuenta el diámetro de la pupila o el radio de la misma los valores de esfera, cilindro y posición axial (sph, zyl, A) del cristal de gafa. De preferencia se calculan de este modo en una etapa ST14 en primer lugar los coeficientes de Zernike ($c_2^0, c_2^2, c_2^{-2}, \dots$). Como se conocen también las aberraciones locales de orden superior se pueden calcular los valores ideales sph, zyl, A del cristal de gafa para una abertura de pupila finita, que corresponde de preferencia a los valores transformados descritos anteriormente. Tanto la relación entre las

25 aberraciones locales ($S'_{xx}, S'_{xy}, S'_{yy}, K'_{xxxx}, K'_{xxyy}, K'_{xyyy}, \dots$) y los coeficientes de Zernike ($c_2^0, c_2^2, c_2^{-2}, \dots$) como se utiliza en particular en la etapa ST14 como también la relación entre los coeficientes de Zernike ($c_2^0, c_2^2, c_2^{-2}, \dots$) y los valores para esfera (Sph), cilindro (Zyl o Cyl) y la posición axial (A) se obtienen en particular en una etapa ST18 como relaciones funcionales $c_2^0, c_2^2, c_2^{-2}, \dots = f(r, S'_{xx}, S'_{xy}, S'_{yy}, K'_{xxxx}, K'_{xxyy}, K'_{xyyy}, \dots)$ y/o Sph, Zyl, A = $f(r, c_2^0, c_2^2, c_2^{-2}, \dots)$, en particular teniendo en cuenta el radio pupilar r.

30 Es preferible que el tamaño de la pupila r se especifique como variable para cada punto de recorrido de la vista. Se prefiere particularmente que el tamaño de la pupila se especifique como función de la distancia del objeto, que

constituye a su vez una función del punto de recorrido de la vista (punto visual). Esto puede ser debido por ejemplo al reflejo de cerca, de modo que en caso de objetos cercanos se reduce el diámetro pupilar supuesto.

5 Al determinar la refracción (ST20) de preferencia no se determinan sólo de modo subjetivo los valores para la esfera, el cilindro y la posición axial, en particular para lejos y cerca, sino que además se determina con un aberrómetro las aberraciones de orden superior ($c_2^0, c_2^2, c_2^{-2}, \dots$). En una etapa ST 22 se combinan los datos de refracción subjetivos y objetivos, en particular teniendo en cuenta la distancia del objeto, la dirección de la mirada y los diámetros pupilares. De este modo es posible calcular valores ideales (transformados) de prescripción (sph, zyl, A) particularmente para varios diámetros pupilares en función de la zona de recorrido de la vista (zona visual), con una métrica adecuada. Resulta particularmente preferible calcular por una parte las prescripciones ideales y luego depositarlas como función de la distancia del objeto. También es preferible determinar por ejemplo con el aberrómetro el diámetro pupilar individual en condiciones fotópicas (pupila pequeña) y mesópicas (pupila grande). En el caso contrario será preciso utilizar valores estándar de la literatura. A continuación se pueden combinar de forma conocida los valores esfero-cilíndricos del cristal de gafa (BG) con los del ojo (ST24) (combinación BG/ojo K: K (Ref, Ast) = BG (Sph, Zyl, Eje) – Ojo (Sph, Zyl, Eje). La función de rendimiento (ST26) en particular los valores teóricos obtenidos en una etapa 10 ST28 S (Ref, Ast) no sufre de preferencia ninguna modificación. En la misma se introducen en particular las diferencias entre los valores de combinación K obtenidos en la etapa ST24 y los valores teóricos S: K (Ref, Ast) – S (Ref, Ast).

Leyenda

- 20 10 Rayo principal
- 12 Ojo
- 14 Primera superficie refringente (superficie delantera del cristal de gafa)
- 16 Segunda superficie refringente (superficie trasera del cristal de gafa)
- 18 Frente de onda inicial
- 25 20 Frente de onda propagado
- 22 Punto imagen
- 24 Rayo contiguo

ST2, ST4 Propagación (y eventualmente rotación)

30

REVINDICACIONES

1. Procedimiento implementado por ordenador para calcular u optimizar un cristal para gafa que comprende las siguientes etapas:

- Especificar por lo menos una superficie para el cristal de gafa que se va a calcular y/u optimizar;

5 - Determinar el recorrido de un rayo principal (10) a través de un punto de recorrido de la vista (punto visual) (i) de por lo menos una superficie;

- Determinar un primer conjunto primario (s_{io}) y un segundo conjunto primario (e_{iok}) de coeficientes de la aberración local de un frente de onda (18) local que sale de por lo menos un punto de vista clara (i) en un entorno del rayo principal (10), donde el primer conjunto primario de coeficientes (s_{io}) define la aberración esférica y astigmática del frente de onda local saliente y el segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}) define otra aberración de orden superior ($k > 2$) del frente de onda local saliente;

10 - Especificar por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$, que hace corresponder a un segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}) un segundo conjunto secundario de coeficientes (e_{pk}), que define la aberración de orden superior de un frente de onda propagado;

- Determinar una aberración de orden superior de un frente de onda local propagado a lo largo del rayo principal (10) que parte del (por lo menos uno) punto de recorrido de la vista (punto visual) (i) en función de por lo menos el segundo conjunto primario de coeficientes (e_{iok}) mediante la función especificada $e_{pk} = f(e_{ok})$; y

15 - Calcular y optimizar por lo menos una de las superficies del cristal de gafa teniendo en cuenta la aberración de orden superior calculada del frente de onda local propagado, donde la función $e_{pk} = f(e_{ok})$, se especifica como una función lineal $e_{pk} = B_k(e_{ok} + r_k)$ en la que el término de proporcionalidad B_k depende el primer conjunto primario de coeficientes (s_{io}) pero no del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}).

20 una función lineal $e_{pk} = B_k(e_{ok} + r_k)$ en la que el término de proporcionalidad B_k depende el primer conjunto primario de coeficientes (s_{io}) pero no del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}).

2. Procedimiento según la reivindicación 1, donde la determinación de un primer conjunto primario de coeficientes comprende la determinación de un vector de potencia $S_o = \begin{pmatrix} S_{xxx} \\ S_{oxy} \\ S_{oyy} \end{pmatrix}$, donde la determinación de un

segundo conjunto primario de coeficientes comprende la determinación de un vector de coma $e_{o3} = \begin{pmatrix} E_{oxxx} \\ E_{oaxy} \\ E_{oayy} \\ E_{oyyy} \end{pmatrix}$ y

25 donde se especifica como por lo menos una función $e_{p3} = f(e_{o3})$ la función

$$e_{p3} = y^3 \begin{pmatrix} \beta_y^{-3} & 3\beta_y^{-2}d/n S_{xy} & 3\beta_y^{-1}(d/n S_{xy})^2 & (d/n S_{xy})^3 \\ \beta_y^{-2}d/n S_{xy} & \beta_y^{-1}(1/\gamma + 3(d/n S_{xy})^2) & 2/\gamma d/n S_{xy} + 3(d/n S_{xy})^3 & \beta_x^{-1}(d/n S_{xy})^2 \\ \beta_y^{-1}(d/n S_{xy})^2 & 2/\gamma d/n S_{xy} + 3(d/n S_{xy})^3 & \beta_x^{-1}(1/\gamma + 3(d/n S_{xy})^2) & \beta_x^{-2}d/n S_{xy} \\ (d/n S_{xy})^3 & 3\beta_x^{-1}(d/n S_{xy})^2 & 3\beta_x^{-2}d/n S_{xy} & \beta_x^{-3} \end{pmatrix} e_{o3}$$

con $\gamma = \frac{1}{1 - d/n S_{xxx} - (d/n S_{oxy})^2 - d/n S_{oyy} + (d/n)^2 S_{xxx} S_{oyy}}$, $\beta_x = \frac{1}{1 - d/n S_{xxx}}$ y $\beta_y = \frac{1}{1 - d/n S_{oyy}}$.

3. Procedimiento según la reivindicación 1 o 2, donde la determinación de un primer conjunto primario de coeficientes comprende la determinación de un vector de potencia $S_o = \begin{pmatrix} S_{xxx} \\ S_{oxy} \\ S_{oyy} \end{pmatrix}$, donde la determinación de un

30 coeficientes comprende la determinación de un vector de potencia $S_o = \begin{pmatrix} S_{xxx} \\ S_{oxy} \\ S_{oyy} \end{pmatrix}$, donde la determinación de un

segundo conjunto primario de coeficientes comprende la determinación de un vector de coma $e_{o3} = \begin{pmatrix} E_{oxxx} \\ E_{oaxy} \\ E_{oayy} \\ E_{oyyy} \end{pmatrix}$ y la

determinación de un vector de aberración esférica

$$e_{o3} = \begin{pmatrix} E_{oxxxxx} \\ E_{oxxxxy} \\ E_{oxxxyy} \\ E_{oxyyyy} \\ E_{oyyyyy} \end{pmatrix}, \quad y$$

donde se especifica como por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$ la función

$$e_{p4} = \begin{pmatrix} \beta_x^4 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \beta_x^3 \beta_y^1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \beta_x^2 \beta_y^2 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \beta_y^4 \end{pmatrix}$$

$$5 \quad \left(e_{o4} + \frac{d}{n} \begin{pmatrix} 3 \left(\beta_x E_{oxxx}^2 + \beta_y E_{oxxx}^2 - \frac{S_{oxx}^4}{n^2} \right) \\ 3E_{oxxx}(\beta_x E_{oxxx} + \beta_y E_{oxxx}) \\ \beta_x (2E_{oxxx}^2 + E_{oxxx}E_{oxxx}) + \beta_y (2E_{oxxx}^2 + E_{oxxx}E_{oxxx}) - \left(\frac{S_{oxx}S_{oxxx}}{n} \right)^2 \\ 3E_{oxxx}(\beta_x E_{oxxx} + \beta_y E_{oxxx}) \\ 3 \left(\beta_x E_{oxxx}^2 + \beta_y E_{oxxx}^2 - \frac{S_{oxxx}^4}{n^2} \right) \end{pmatrix} \right)$$

con $\beta_x = \frac{1}{1-d/nS_{oxxx}}$ y $\beta_y = \frac{1}{1-d/nS_{oxxx}}$.

4. Procedimiento según una de las reivindicaciones anteriores que comprende además la determinación de un ángulo α entre un primer plano de refracción del rayo principal en una primera superficie del cristal de gafa y una segunda superficie de refracción del rayo principal en una segunda superficie del cristal de gafa, donde la determinación de una aberración de orden superior comprende
 - Determinar un segundo conjunto secundario (e_{ipk}) de coeficientes de la aberración local del frente de onda propagado; y
 - Determinar un segundo conjunto secundario transformado (\tilde{e}_{ipk}) de coeficientes en función del ángulo α determinado.
5. Procedimiento según una de las reivindicaciones anteriores que comprende además un registro de datos de prescripción V donde los datos de prescripción comprenden datos relativos al efecto esférico Sph_v , la magnitud del astigmatismo Zyl_v , el eje de astigmatismo $Achse_v$ así como por lo menos otra refracción de orden superior HOA_v .
6. Procedimiento según la reivindicación 6, donde el registro de datos de prescripción comprende un registro de primeros datos de prescripción para una primera distancia del objeto y de los segundos datos de prescripción para una segunda distancia del objeto.
7. Procedimiento según una de las reivindicaciones anteriores, que comprende además:
 - Especificar un modelo de distancia del objeto $AI(x, y)$, donde AI designa la distancia del objeto y (x, y) un punto de recorrido de la vista (punto visual) del cristal de gafa en un sentido especificado o especificable;
 - Especificar una función $r_0 = g(AI)$, que describe la dependencia de un tamaño de pupila r_0 respecto de la distancia del objeto AI ;
 - Determinar un tamaño de pupila para el por lo menos un rayo principal (10) mediante el modelo de distancia del objeto $AI(x, y)$ y la función especificada $r_0 = g(AI)$.
8. Procedimiento según una de las reivindicaciones anteriores, donde el cristal de gafa a optimizar es un cristal de gafa progresivo.
9. Dispositivo para calcular y optimizar un cristal de gafa que comprende:
 - una base de datos de modelos de superficie para especificar por lo menos una superficie para el cristal de gafa a calcular y/u optimizar;

- dispositivo de determinación del rayo principal para determinar el recorrido de un rayo principal (10) a través de por lo menos un punto de recorrido de la vista (punto visual) (i) de por lo menos una superficie;
- dispositivo para determinar los coeficientes primarios, para determinar un primer conjunto primario (s_{io}) y un segundo conjunto primario (e_{io}) de coeficientes de la aberración local de un frente de onda local (18) a través de por lo menos un punto visual (I) en un entorno del rayo principal (10), donde el primer juego primario de coeficientes (s_{io}) define la aberración esférica y astigmática del frente de onda local saliente y el segundo conjunto primario de coeficiente (e_{io}) define otra aberración de orden superior ($k > 2$) del frente de onda local saliente;
- 5 - una base de datos de modelos de propagación para especificar por lo menos una función $e_{pk} = f(e_{ok})$, que hace que se corresponda un segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}) con un segundo conjunto secundario de coeficientes (e_{pk}), que define la aberración de orden superior de un frente de onda propagado;
- 10 - dispositivo de determinación de coeficientes secundarios para determinar una aberración de orden superior de un frente de onda local propagado a lo largo del rayo principal (10) que parte de por lo menos un punto de recorrido de la vista (punto visual) (i) en función de por lo menos el segundo conjunto primario de coeficientes (e_{io}) mediante la función especificada $e_{pk} = f(e_{ok})$; y
- 15 - dispositivos de cálculo o de optimización concebidos para calcular u optimizar por lo menos una superficie del cristal de gafa teniendo en cuenta la aberración de orden superior calculada del frente de onda local propagado, donde la función $e_{pk} = f(e_{ok})$ se especifica como una función lineal $e_{pk} = B_k(e_{ok} + r_k)$ en la cual el término de proporcionalidad B_k depende del primer conjunto primario de coeficientes (s_{io}) pero no del segundo conjunto primario de coeficientes (e_{ok}).
- 20 10. Producto de programa informático, que, una vez cargado y ejecutado en un ordenador está concebido para realizar un método para calcular u optimizar un cristal de gafa según una de las reivindicaciones 1 a 8.
- 11. Un soporte de datos que comprende un programa informático, donde el programa informático, una vez cargado y ejecutado en un ordenador, está concebido para realizar un método para el cálculo o la optimización de un cristal de gafa según una de las reivindicaciones 1 a 8.
- 25 12. Procedimiento para la fabricación de un cristal de gafa que comprende:
Cálculo u optimización de un cristal de gafa según un procedimiento para el cálculo o la optimización de un cristal de gafas según una de las reivindicaciones 1 a 8;
Fabricación del cristal de gafa así calculado u optimizado.
- 13. Dispositivo para la fabricación de un cristal de gafa que comprende:
- 30 Dispositivo de cálculo o de optimización concebido para calcular u optimizar el cristal de gafa según un procedimiento para calcular u optimizar un cristal de gafa según una de las reivindicaciones 1 a 8;
Métodos de elaboración, concebidos para terminar la elaboración del cristal de gafa.

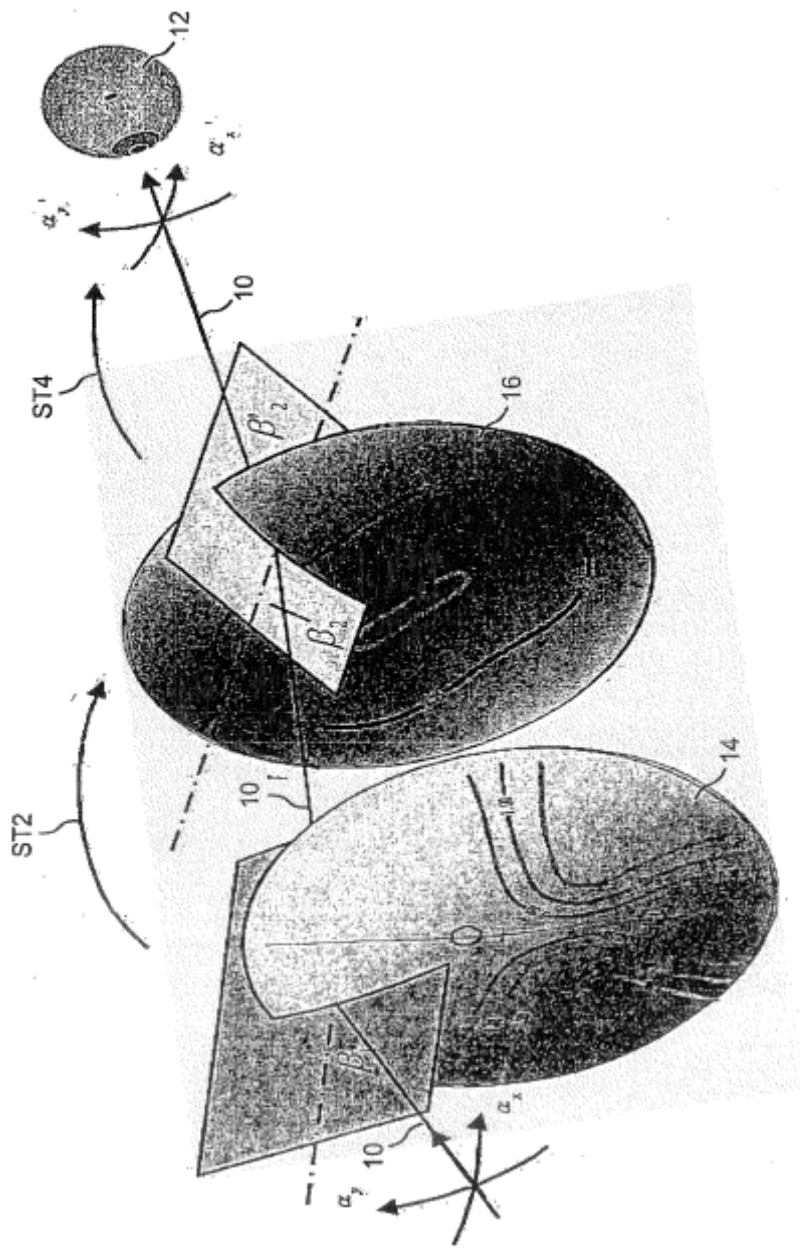


FIG 1

FIG 2

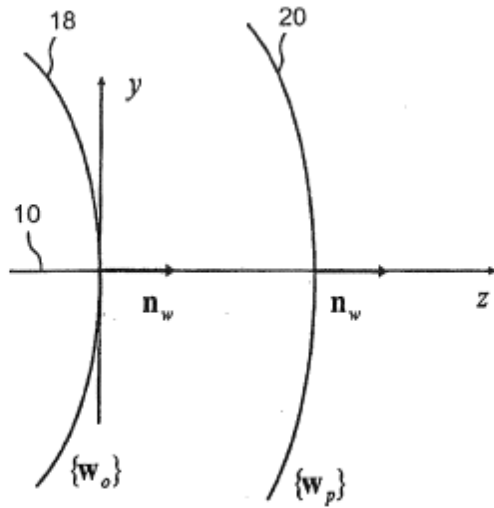


FIG 3

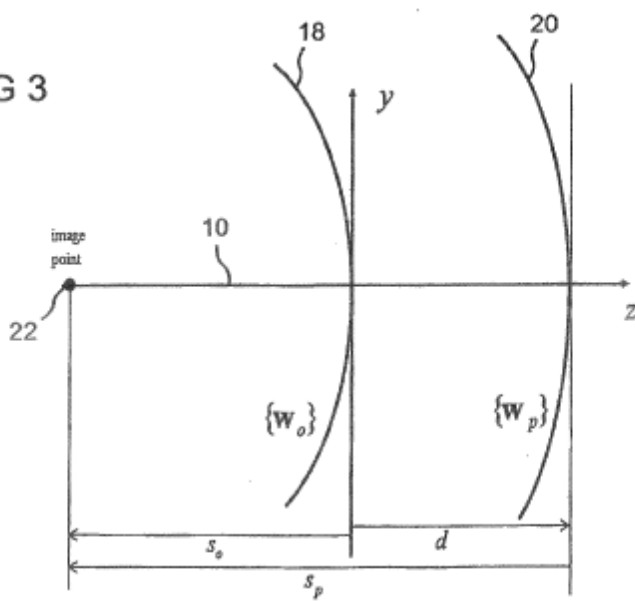


FIG 4

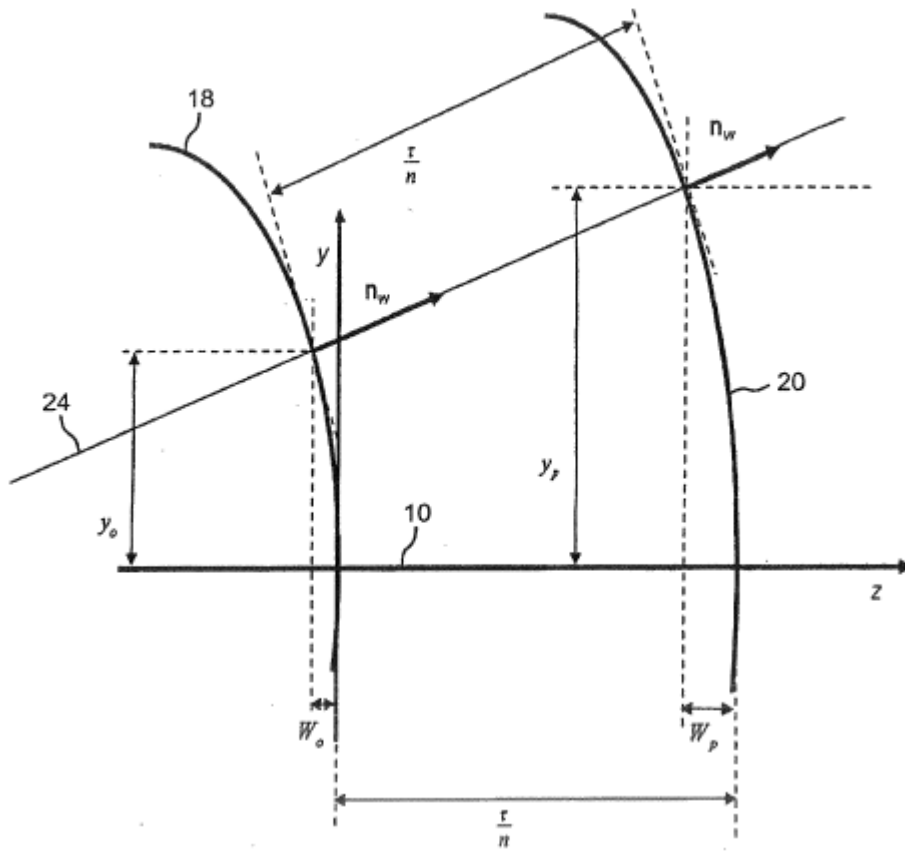


FIG 5

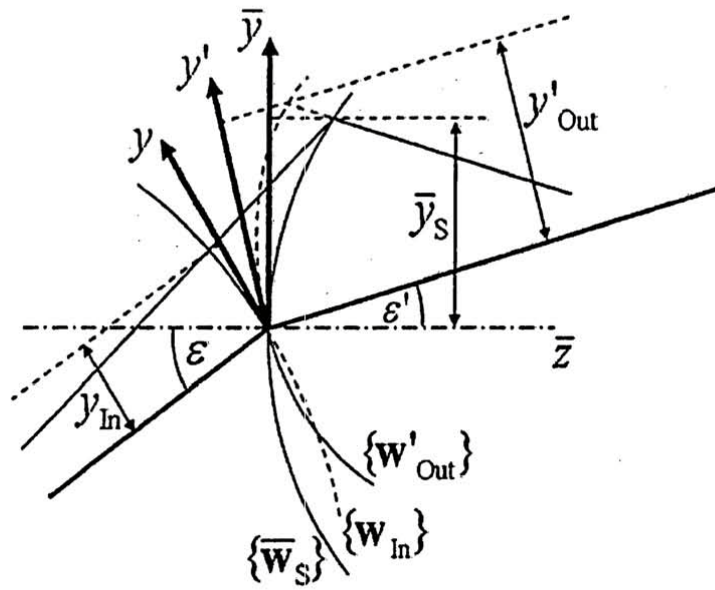


FIG 6

