

19



OFICINA ESPAÑOLA DE  
PATENTES Y MARCAS

ESPAÑA



11 Número de publicación: **2 547 128**

51 Int. Cl.:

**G01H 1/00** (2006.01)

**G01M 7/00** (2006.01)

12

TRADUCCIÓN DE PATENTE EUROPEA

T3

96 Fecha de presentación y número de la solicitud europea: **16.12.2011 E 11461543 (8)**

97 Fecha y número de publicación de la concesión europea: **12.08.2015 EP 2604522**

54 Título: **Un procedimiento de evaluación en vuelo de la ausencia de aleteo de un avión**

45 Fecha de publicación y mención en BOPI de la traducción de la patente:  
**01.10.2015**

73 Titular/es:

**INSTYTUT LOTNICTWA W WARSZAWIE (100.0%)  
Al. Krakowska 110/114  
02-256 Warszawa, PL**

72 Inventor/es:

**NIEPOKÓLCZYCKI, ANTONI;  
LENORT, FRANCISZEK;  
KRÓLIKOWSKI, ROBERT;  
SZMIDT, MICHAŁ y  
KUCIO, PAWEŁ**

74 Agente/Representante:

**CARPINTERO LÓPEZ, Mario**

**ES 2 547 128 T3**

Aviso: En el plazo de nueve meses a contar desde la fecha de publicación en el Boletín europeo de patentes, de la mención de concesión de la patente europea, cualquier persona podrá oponerse ante la Oficina Europea de Patentes a la patente concedida. La oposición deberá formularse por escrito y estar motivada; sólo se considerará como formulada una vez que se haya realizado el pago de la tasa de oposición (art. 99.1 del Convenio sobre concesión de Patentes Europeas).

## DESCRIPCIÓN

Un procedimiento de evaluación en vuelo de la ausencia de aleteo de un avión

La presente invención se refiere a un procedimiento de evaluación en vuelo de la ausencia de aleteo de un avión.

5 Las vibraciones por aleteo son vibraciones aero-elásticas auto-excitadas de una estructura de avión durante el vuelo. A ciertas velocidades de vuelo, las fuerzas aerodinámicas relacionadas con el movimiento vibratorio, por ejemplo, de un ala, pueden, para propiedades específicas de rigidez masiva de la construcción, provocar el desarrollo de vibraciones, por ejemplo, formas de vibraciones por torsión-flexión, lo que lleva a la destrucción del avión.

10 Las regulaciones de la aviación requieren ejecutar evaluaciones del aleteo en vuelo para aviones nuevos, a fin de documentar que el avión está libre de aleteo. Actualmente, las evaluaciones de aleteo se realizan de modo tal que los datos son recogidos desde sensores de vibración situados en partes de la estructura del avión durante vuelos de prueba y, posteriormente, después de que el vuelo ha terminado, se obtienen los resultados del análisis de los datos. Los procedimientos conocidos no admiten la evaluación en vuelo de la ausencia de aleteo. Un proceso de ese tipo consume tiempo y es caro, dado que permite obtener conclusiones solamente después de que el vuelo ha terminado, y ejecutar evaluaciones para velocidades mayores del avión solamente durante el próximo vuelo de prueba.

15 La evaluación del aleteo en vuelo debería demostrar y documentar que el avión está libre de aleteo dentro de todo el intervalo de velocidades y altitudes planeadas. Esto se demuestra proporcionando valores de coeficientes de amortiguación para las modalidades de vibración de la estructura del avión que sean relevantes para el aleteo.

20 Un avión aprobado para el servicio debe ser resistente al aleteo. Se supone que el avión está adecuadamente construido en términos de aleteo si los coeficientes de amortiguación para las modalidades relevantes de vibración son mayores que cero y no menores que  $\xi = 0,015$ . Este valor significa físicamente que las vibraciones excitadas, auto-atenuantes, por ejemplo, de un ala, deberían atenuarse en una reducción de amplitud de alrededor del 10% para cada periodo de vibración en todo el intervalo de condiciones de vuelo aprobadas.

25 Los procedimientos conocidos para la evaluación de coeficientes de amortiguación de aleteo implican la excitación artificial de vibraciones y el análisis posterior al vuelo de estas vibraciones para vuelos con velocidades consecutivamente crecientes. Se usan excitaciones de impulso, armónicas o estocásticas. Esto requiere el montaje de aparatos de medición en el avión, aumenta los costes de evaluación y alarga el tiempo de evaluación.

Las vibraciones por aleteo tienen un carácter de señales no estacionarias, es decir, sus propiedades espectrales varían en el tiempo – las variaciones pueden concernir a la amplitud, la frecuencia y la fase. La variación en el tiempo de los parámetros de vibración espectral puede ser auto-excitada o artificialmente excitada.

30 Uno de los procedimientos para la evaluación en vuelo del aleteo de un avión implica vibraciones de la estructura del avión que son excitadas por impulso usando activadores de cohetes. Las respuestas de impulso son analizadas a fin de determinar las formas de la modalidad de la vibración y sus coeficientes de amortiguación. La excitación de impulso se entiende como una excitación con una fuerza de entre 200 y 2.000 N durante entre 10 y 50 milisegundos. Una respuesta de impulso ejemplar de un avión en vuelo se muestra en la Fig. 1. Las respuestas de impulso se miden con  
35 sensores de vibración.

40 Los procedimientos habituales permiten la determinación adecuada de propiedades espectrales medias de una señal para periodos de tiempo relativamente largos. La Transformada Rápida de Fourier se usa normalmente con este fin. Sin embargo, los típicos algoritmos de la Transformada Rápida de Fourier son adecuados para el análisis de segmentos largos de una señal y para altas frecuencias, del orden de miles de Hz. Por lo tanto, no son adecuados para las típicas vibraciones de aleteo de un avión, que tienen una frecuencia de hasta varias decenas de Hz. Por tanto, existe la necesidad de mejorar el procedimiento del cálculo de la Transformada Rápida de Fourier a fin de lograr una resolución mejorada en intervalos inferiores de frecuencias.

45 Además, ha sido demostrado teóricamente que la respuesta de impulso de un objeto monitorizado puede ser sustituida con una función de auto-correlación (también llamada una auto-correlación) de una señal estocásticamente excitada. Suponiendo que las vibraciones de las alas o de un plano de cola de un avión durante el vuelo tengan las propiedades de vibraciones estocásticamente excitadas, los coeficientes de amortiguación pueden ser estimados en base al análisis de las estimaciones de la función de auto-correlación (y la estimación de la función de auto-correlación). Las siguientes publicaciones se refieren a este tema:

50 - Uhl T., Llsowski W., Kurowski P.: Análisis modal en funcionamiento y sus aplicaciones, Katedra Robotyki y Dynamiki Maszyn. Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie. Kraków 2001.

- Hermans L., Van der Auweraer H.: Sobre el uso de funciones de auto-correlación y correlación cruzada para extraer parámetros modales de datos de solo salida. En los Anales de la 6ª conferencia internacional sobre avances recientes

en la dinámica estructural. Artículo de trabajo en curso, Universidad de Southampton, RU, 1997.

Hay procedimientos conocidos para calcular la estimación de la auto-correlación para señales estacionarias. Sin embargo, estos procedimientos cambian los valores de coeficientes de amortiguación de la señal de origen de las vibraciones efectivas.

- 5 Hay ecuaciones usadas normalmente para calcular la función de correlación para procesos estacionarios, ergódicos y estocásticos con el uso de una única ejecución del proceso estocástico, suficientemente extendido en el tiempo. Una función de auto-correlación de un proceso  $y(t)$  puede ser calculada usando la ecuación (1) mostrada en la Fig. 2.

10 Un proceso estacionario tiene un valor medio constante  $m_y$  en el tiempo y una varianza constante en el tiempo. Un proceso estacionario es ergódico cuando los promedios temporales son iguales a los promedios conjuntos sobre el intervalo de la realización de procesos estocásticos.

Sin embargo, las ecuaciones anteriores son aplicables a una señal de vibración infinitamente larga. Una función de auto-correlación de una señal de ese tipo preserva las frecuencias y los coeficientes de amortiguación modal del objeto evaluado.

15 Sin embargo, durante las mediciones en vuelo, los segmentos medidos de las vibraciones son siempre finitos. Las estimaciones de la función de auto-correlación de tales señales cambian sus coeficientes de amortiguación. En tales casos, las estimaciones existentes de la función de auto-correlación introducen errores metodicos, relacionados inequívocamente con estimaciones individuales. El análisis de las señales de vibraciones efectivas introduce además errores resultantes de errores de medición y del hecho de que las excitaciones de vibraciones en vuelo no son exactamente un ruido blanco estacionario.

20 El artículo "Aplicación de una técnica de prueba de vuelo y de análisis de datos para el aleteo de un avión drone" de Robert M. Bennett et al (Memorando técnico de la NASA 83136, 1 de mayo de 1981, páginas 1 a 10, XP55030869, Hampton, Virginia 23665, EE UU) presenta resultados de identificación modal que fueron obtenidos a partir de pruebas de aleteo de un vehículo drone con un ala de investigación, estando equipado con un sistema de supresión de aleteo (FSS). La frecuencia y la amortiguación de varias modalidades están determinadas por un análisis modal del dominio del tiempo de la función de respuesta de impulso obtenida por transformaciones de Fourier de datos, a partir de la  
25 excitación de ondas sinusoidales velozmente barridas por las superficies de control del FSS sobre el ala. El procedimiento usado corresponde a las etapas indicadas en el preámbulo de la presente reivindicación 1.

30 Una solicitud de patente coreana KR20080000713 presenta un procedimiento para analizar datos de pruebas de vuelos de aleteo. Una señal de acuerdo a una situación de prueba es recibida desde un avión de pruebas. Un auto-valor de los datos es calculado mediante un algoritmo de identificación de sistemas sub-espaciales.

Una solicitud de patente estadounidense US2004267478 presenta un procedimiento para analizar datos de pruebas de aleteo usando el ajuste de curvas sinusoidales amortiguadas.

Ninguno de los procedimientos de la técnica anterior sugiere evaluar vibraciones analizando estimaciones de la función de auto-correlación.

35 Es el objeto de la presente invención proporcionar un procedimiento para la evaluación de la ausencia de aleteo de un avión, con el uso de algoritmos tales que permitan la evaluación en tiempo real en vuelo.

El objeto de la invención es logrado por un procedimiento implementado por ordenador, de acuerdo a la reivindicación 1.

40 Preferiblemente, la función de auto-correlación  $R_{yy}(l)$  se calcula con el uso de una Transformada Rápida de Fourier, de acuerdo a la ecuación:

$$R_{yp}(k) = \frac{1}{N/2} FFT^{-1}[Y_{YYP}(j)] \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N/2 - 1$$

$$Y_{YYP}(j) = Y(j) YP^*(j) \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$Y(j) = FFT[y(n)]$$

$$YP(j) = FFT[yp(n)]$$

$$yp(n) = y(n) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

$$yp(n) = 0 \quad \text{para} \quad n = N/2 + 1, \dots, N$$

en las que  $n = 1, 2, 3, \dots, N$   $N = 2^i$ . En la que  $i$  es un número natural.

Preferiblemente, el segmento muestreado de la señal que tiene la longitud de  $N$  muestras es rellenado con ceros a fin de obtener una secuencia de salida que tenga la longitud de  $N_{\text{suma}} = 2^i$ , en la que  $i$  es un número natural y la Transformada Rápida de Fourier se calcula para la secuencia de salida.

Preferiblemente, la Transformada Rápida de Fourier se calcula usando tablas de valores de funciones seno y coseno para ángulos dependientes del número de muestras y de la frecuencia de muestreo, preparados después del inicio del sistema.

Preferiblemente, se genera una imagen que visualiza las vibraciones medidas por los sensores, comprendiendo la imagen una imagen de la estructura del avión y sus desviaciones resultantes de las vibraciones, mientras que las desviaciones con parámetros por encima de valores de umbral están marcadas con un color distinto al color de las desviaciones que tienen parámetros por debajo de los valores de umbral.

Preferiblemente, las vibraciones son visualizadas usando un procedimiento que implica el cálculo de un desplazamiento de fase o un procedimiento que implica el cálculo de una fase de movimiento en puntos especificados en el tiempo.

El objeto de la invención también es logrado por un sistema de medición para la evaluación en vuelo de la ausencia de aleteo de un avión equipado con sensores de vibración situados en la estructura del avión, en el que el sistema comprende circuitos de procesamiento de señales para realizar el procedimiento de acuerdo a la invención.

El objeto de la invención también es logrado por un programa de ordenador que comprende un código de programa para realizar todas las etapas del procedimiento de acuerdo a la invención cuando el programa es ejecutado en un ordenador.

La solución de acuerdo a la presente invención implica un procedimiento de procesamiento de datos, que permite la evaluación de propiedades aero-elásticas de un avión durante una evaluación de aleteo en vuelo. Esto aumenta la seguridad de las pruebas de aleteo durante el vuelo y reduce el tiempo necesario para ejecutar las pruebas, lo que disminuye significativamente los costes de producción de un avión. Los análisis se ejecutan dentro de un segundo después de las mediciones de vibraciones que abarcan un periodo de un segundo o unos pocos segundos, facilitando por ello la respuesta rápida en caso de detección de cualquier tendencia a vibraciones peligrosas de aleteo.

Las formas modales de vibraciones se determinan de manera eficaz restando las modalidades predefinidas de las vibraciones a la señal evaluada y verificando si, después de la resta, la suma de cuadrados se ha reducido o no en un valor de umbral predefinido.

El procedimiento divulgado para calcular la función de auto-correlación, basado en segmentos finitos de vibraciones, preserva las propiedades naturales de las modalidades modales de las vibraciones de la señal evaluada y preserva los valores de los coeficientes de amortiguación y las frecuencias naturales del objeto evaluado. Los cálculos pueden hacerse más rápidamente por medio de una Transformada Rápida de Fourier.

El procedimiento presentado para calcular la función de auto-correlación es adecuado para el análisis de vibraciones que son crecientes y auto-atenuantes, o el análisis de vibraciones normales durante la explotación del avión, llevada a cabo para el análisis de las propiedades dinámicas actuales del avión.

La invención se muestra por medio de una realización ejemplar en un dibujo en el cual:

- 5 la Fig. 1 presenta una respuesta de impulso ejemplar de una estructura de avión en vuelo;
- la Fig. 2 presenta una ecuación para determinar la función de auto-correlación del proceso  $y(t)$ ;
- la Fig. 3 presenta un modelo matemático  $\hat{y}(t)$  para determinar una suma finita de modalidades de vibración natural;
- la Fig. 4 presenta una ecuación para calcular la suma de restos de cuadrados (RSS) y sus derivados;
- la Fig. 5 presenta el cálculo de continuación del derivado de la RSS;
- 10 la Fig. 6 presenta gráficamente la ecuación (9) para dos modalidades;
- la Fig. 7 presenta las ecuaciones (9) en un dominio de frecuencia;
- la Fig. 8 presenta una transformación de una señal temporal que comprende dos formas modales de vibraciones;
- la Fig. 9 presenta una secuencia de transformaciones de una señal  $y(t)$  a fin de obtener la ecuación de fase  $\varphi$ ;
- la Fig. 10 presenta una forma de la función  $y(t)$ ;
- 15 la Fig. 11 presenta el cálculo de la amplitud  $A$  en el punto inicial de la ventana de análisis;
- la Fig. 12 presenta ecuaciones para calcular la amplitud  $A$ ;
- las Figs. 13A y 13B presentan ejemplos del cálculo de la función de auto-correlación para la función  $y(t)$ ;
- la Fig. 14 presenta un trazado ejemplar de una señal atenuadora y su auto-correlación;
- la Fig. 15 presenta la estimación de la función de auto-correlación en forma de una suma;
- 20 la Fig. 16 presenta la estimación de la función de auto-correlación en forma de una integral;
- las Figs. 17 a 20 presentan ecuaciones relacionadas con la respuesta de impulso;
- la Fig. 21 presenta una ecuación analítica de una función de auto-correlación;
- las Figs. 22 a 30 presentan un ejemplo del cálculo de la función de auto-correlación y los resultados del cálculo;
- las Figs. 31 a 32 presentan cálculos del coeficiente  $\xi$  de amortiguación de vibraciones;
- 25 la Fig. 33 presenta una ecuación para calcular la función de auto-correlación  $R_{yy}(k)$  usando el procedimiento de la FFT para la realización del proceso estocástico  $y(n)$ ;
- la Fig. 34 presenta la ecuación más común para calcular la transformada discreta de Fourier;
- la Fig. 35 presenta un algoritmo para calcular la Transformada Rápida de Fourier;
- la Fig. 36 presenta una visualización ejemplar de modalidades operativas de vibraciones;
- 30 la Fig. 37 presenta un ejemplo de un sistema de ordenador para llevar a cabo el procedimiento de acuerdo a la presente invención.

Determinación de formas modales de vibraciones y sus coeficientes de amortiguación

Las señales medidas por sensores de vibraciones son analizadas a fin de determinar las formas modales de vibraciones y sus coeficientes de amortiguación.

- 35 Suponiendo que un objeto es lineal, para desviaciones pequeñas a partir de un estado equilibrado, cada movimiento de vibración libre de la estructura del avión está compuesto por una suma de movimientos relacionados con formas modales de vibraciones. Para aviones para los cuales la amplitud de las vibraciones del extremo del ala, después de la excitación de impulso, no supera, por ejemplo, los 2 mm, la hipótesis de linealidad está justificada. Se supone que un movimiento libre registrado de vibraciones atenuadas, después de una excitación de impulso, puede ser descrito con

un modelo matemático  $\hat{y}(t)$  que define una suma finita de modalidades naturales, según se muestra en la Fig. 3.

El coeficiente  $\xi$  de amortiguación relativa es el valor principal, que ha sido usado como medida de resiliencia a las vibraciones de aleteo.

5 El objeto real tiene un número infinito de modalidades de vibraciones, mientras que el resultado registrado de la medición tiene un número finito de modalidades, debido a las restricciones del circuito de medición. Los cálculos numéricos también reducen el número de modalidades analizadas, debido a la naturaleza discreta de las mediciones.

La hipótesis inicial de la linealidad del objeto no excluye la posibilidad de detectar la no linealidad, p. ej., determinando la relación entre, p. ej., el  $\xi$  de amortiguación y el valor de la amplitud de las vibraciones, midiendo las propiedades temporales del objeto mientras las vibraciones se atenúan después de la excitación del impulso.

10 Las ecuaciones  $\hat{y}(t)$  de la Fig. 3 son series finitas de Fourier, cuyas modalidades son las formas de las vibraciones naturales del avión.

El problema de la identificación de los parámetros del modelo del objeto puede ser resuelto definiendo los valores de: las amplitudes  $A_p$ , las frecuencias  $\omega_{wp}$ , los coeficientes de amortiguación  $\xi_p$  y los ángulos de fase  $\varphi_p$  de las formas modales individuales de las vibraciones en los registros analizados de las vibraciones atenuadas.

15 Teniendo un modelo matemático formulado  $\hat{y}(t)$  de la configuración física bajo evaluación y los gráficos temporales efectivos  $y(t)$ , los parámetros de las formas modales de las vibraciones pueden ser determinados a partir de la regla de minimización de la suma de restos de cuadrados (RSS), representada por la ecuación mostrada en la Fig. 4.

20 Comparando con cero los derivados de esta suma con respecto a todos los parámetros buscados, se obtiene un conjunto de ecuaciones no lineales. Para P formas modales, se obtiene un conjunto de 4P ecuaciones. Sin embargo, no es necesario calcular frecuencias naturales a partir de un conjunto extendido de ecuaciones de ese tipo. Para determinar las frecuencias naturales, pueden usarse transformaciones de Fourier.

El procedimiento para determinar parámetros óptimos del modelo  $\hat{y}(t)$  puede estar basado en un procedimiento modificado para buscar los coeficientes óptimos de una serie de Fourier para una función dada  $\hat{y}(t)$ .

25 Para una serie de Fourier, se supone un conjunto de funciones armónicas y se buscan valores óptimos de los coeficientes  $a_p$  y  $b_p$ .

Teniendo un conjunto de modalidades de vibraciones, pueden hallarse las amplitudes óptimas de estas modalidades de vibraciones. La única diferencia es que aquí está presente una amplitud variable en el tiempo. En la parte adicional de la Fig. 5 se muestra cómo calcular un derivado de la RSS con respecto a  $a_{pt}$  y  $b_{pt}$ , a fin de buscar tales coeficientes, variables en el tiempo, que también dependen de la influencia de los parámetros  $f_{wp}$  y  $\xi_p$ .

30 Las sumas que tienen una forma (4, 5), según se muestra en la Fig. 5, después de la multiplicación por un coeficiente  $2/N$ , forman una transformada discreta de Fourier para la frecuencia natural  $\omega_{wp}$  para la p-ésima modalidad, hecha para una longitud finita de la señal  $y_n$ . El coeficiente  $2/N$  resulta de una propiedad de la transformada discreta de Fourier y de la ecuación para los coeficientes de la serie de Fourier.

35 Los conjuntos de ecuaciones (2) y (3) de la Fig. 4, después de la multiplicación en ambos lados por  $2/N$ , pueden ser formulados como las ecuaciones (6) y (7) mostradas en la Fig. 5.

Puede confirmarse de tal modo que, partiendo del procedimiento de mínimos cuadrados en el dominio del tiempo, ha sido obtenido un conjunto de ecuaciones en el dominio de la frecuencia.

40 Las mejores estimaciones de formas modales de vibraciones se obtienen a partir de las reglas de que la parte real de la transformación de señal en el punto  $f_{wp}$  es igual a la suma de las partes reales de las transformaciones de formas modales de vibraciones en este punto específico del espectro de vibraciones. Relaciones similares valen para la parte imaginaria de la transformada de Fourier.

45 A fin de diagonalizar la matriz del conjunto de ecuaciones, las ecuaciones (7) de la Fig. 5, multiplicadas por una unidad imaginaria con un signo menos (-j), son sumadas a las ecuaciones (6) para obtener un conjunto de ecuaciones (8) mostradas en la Fig. 5, presentadas además en forma vectorial (9), en las que Y indica una transformación de la función temporal específica.

El conjunto de ecuaciones (9) también puede ser obtenido comparando la señal  $y(t)$  con un modelo buscado  $\hat{y}(t)$ , y realizando una transformada de Fourier para las frecuencias naturales de modalidades sucesivas. Sin embargo, un

proceso de ese tipo no muestra que el conjunto de ecuaciones (9) resulta del procedimiento de mínimos cuadrados de errores.

5 En la Fig. 6, la ecuación (9) para dos modalidades se presenta en forma gráfica. En la Fig. 6, el módulo de transformación de la primera modalidad de vibraciones es dominante en el punto  $f_{w1}$ , y el módulo de transformación de la segunda modalidad de vibraciones es dominante en el punto  $f_{w2}$ .

Para los datos presentados en la Fig. 6, la minimización de la suma de cuadrados de errores en el dominio del tiempo lleva a un conjunto de ecuaciones en el dominio de la frecuencia, según se muestra en la Fig. 7. Estas son ecuaciones vectoriales para las frecuencias naturales  $f_{w1}$  (la primera ecuación) y  $f_{w2}$  (la segunda ecuación).

10 La matriz del conjunto de ecuaciones (9) es similar a una matriz diagonal. La diagonal comprende las palabras  $\hat{Y}_{w1,1}$ ,  $\hat{Y}_{w2,2}$ , ...,  $\hat{Y}_{wP,P}$ . Las palabras restantes, normalmente, son significativamente inferiores. Por lo tanto, en la primera aproximación puede haber ecuaciones supuestas (10), mostradas en la Fig. 7.

A partir de las ecuaciones (10), puede determinarse la primera aproximación de las formas modales buscadas de las vibraciones.

15 La segunda aproximación puede implicar la influencia de las modalidades vecinas y adicionales, que fueron calculadas en la primera aproximación, sobre el valor de las transformaciones en puntos individuales  $f_{wp}$ .

En la tercera aproximación, se incluyen todas las modalidades calculadas en la segunda aproximación, etc.

La transformada de Fourier de una respuesta de impulso del objeto evaluado puede ser el origen de información sobre las frecuencias naturales.

20 Los valores máximos (picos de resonancia) indican las ubicaciones de frecuencias naturales. La influencia de las modalidades vecinas sobre las posiciones de los picos es baja si las modalidades están separadas entre sí. Si las vibraciones de un ala del avión se miden usando un circuito de calibración de tensión, que registra solamente la flexión, luego las modalidades medidas son separadas entre sí. El circuito de calibración de tensión para medir la torsión de un ala también registra solamente modalidades de torsión separadas entre sí (Fig. 8).

25 Los sensores de aceleración situados, p. ej., en la línea de juntas de la modalidad de torsión también registran solamente las modalidades de flexión separadas entre sí. Si dos sensores de aceleración están situados sobre un cordón de ala e igualmente separados del eje de torsión, entonces, sumando sus lecturas, la modalidad de flexión puede ser eliminada, y restando sus lecturas, la modalidad de torsión puede ser eliminada y la modalidad de flexión puede ser amplificada dos veces.

30 Sin embargo, no es posible determinar exactamente las frecuencias naturales que estén situadas muy cercanas entre sí, cuando el módulo de transformación comprende solamente un pico en lugar de dos picos vecinos, según se muestra en la Fig. 8. La transformación, según se muestra en la Fig. 8, de la señal temporal que comprende dos formas modales de vibraciones tiene solamente un único máximo (línea continua). La existencia de picos de resonancia depende en gran medida del desplazamiento de fase de las modalidades de las vibraciones. En la Fig. 8, las modalidades de las vibraciones tienen amplitudes iniciales  $A_1 = 15$  y  $A_2 = 15$ , las frecuencias  $f_{w1} = 10,5$  Hz y  $f_{w2} =$

35  $11,5$  Hz, los coeficientes de amortiguación  $\zeta_1 = 0,05$  y  $\zeta_2 = 0,04$ ,  $\Pi_1 = 1$ ,  $\Pi_2 = 0$ .

40 Al registrar una respuesta de impulso con un tiempo de atenuación de alrededor de 1s, pueden aparecer problemas con la determinación adecuada de dos modalidades separadas por menos de 1 Hz. Empleando los precitados procedimientos de medición, es posible impedir tales problemas en la práctica. Las frecuencias determinadas en la primera aproximación a partir del conjunto de ecuaciones (10) son corregidas en iteraciones sucesivas, incluyendo la influencia de las modalidades vecinas sobre la ubicación de picos de resonancia.

45 Para frecuencias naturales determinadas de esta manera, los coeficientes de amortiguación pueden ser calculados usando los procedimientos conocidos, por ejemplo, usando la transformada de Fourier según lo presentado en la siguiente publicación: Lenort F., "Aplicación de la transformada de Fourier a pruebas de aleteo", Revista de Mecánica Teórica y Aplicada, N° 4/94, Warszawa 1994. Una respuesta de impulso conocida de un objeto permite determinar los valores preliminares de  $f_{wp}$  y  $\xi_p$  de modalidades sucesivas de vibraciones presentes en la señal evaluada.

#### Determinación de fase

Las frecuencias calculadas  $f_{wp}$  de las vibraciones naturales sirven como la información preliminar sobre las modalidades efectivas de las vibraciones. En base a las pruebas de vibración en tierra (GVT), las frecuencias individuales  $f_{wp}$  pueden ser asociadas a modalidades específicas de vibraciones: la primera de flexión, la segunda de

flexión, la primera de torsión, etc.

Para una evaluación detallada, teniendo varios sensores situados sobre un ala, con dos sensores por cordones de ala seleccionados, usando transformaciones de Fourier, las fases de movimiento de los puntos de construcción seleccionados pueden ser determinadas para modalidades individuales de vibraciones en un momento específico en el tiempo.

En el modelo matemático tal como se muestra en la Fig. 3, los valores  $\varphi_p$  pueden ser usados para determinar las modalidades de las vibraciones. Si en el punto inicial de la ventana de análisis, los ángulos  $\varphi$ , procedentes de dos sensores situados sobre un único cordón de ala, tienen el mismo valor, significa que están en fase y que el movimiento de esa frecuencia dada es un movimiento de flexión. Si las fases  $\varphi$  difieren en  $180^\circ$ , entonces el movimiento analizado es un movimiento de torsión.

La determinación del valor  $\varphi_p$  se requiere para la identificación completa de los parámetros del modelo matemático. La transformada de Fourier puede ser usada para determinar el valor  $\varphi_p$ .

La Fig. 9 presenta una secuencia de transformaciones de la señal  $y(t)$  para obtener la ecuación para la fase  $\varphi$ , a partir de la cual puede obtenerse que, habiendo calculado la parte real e imaginaria de una transformada de Fourier para una frecuencia natural  $\omega_w$  dada, la fase  $\varphi$  de la función  $y(t)$  puede ser determinada en el punto inicial de la ventana de análisis.

Cuando la función  $y(t)$  representa una sinusoidal amortiguada, la ecuación para determinar la fase  $\varphi$  está gravada con un cierto error. Sin embargo, el error puede ser eliminado conociendo de antemano el coeficiente de amortiguación  $\xi$ . Una función de la forma presentada en la Fig. 10, antes de calcular el valor  $\varphi$ , puede ser multiplicada por la función  $\exp(\lambda t)$ , a fin de eliminar el factor exponencial en la función  $y(t)$ .

La fase  $\varphi$  de una única forma modal de vibraciones, por lo tanto, puede ser calculada exactamente. En el caso de múltiples modalidades, el resultado está gravado con un error de la influencia de las modalidades vecinas. Esta influencia puede ser eliminada en iteraciones posteriores eliminando de la señal las modalidades vecinas, calculadas en la iteración previa.

#### Determinación de amplitud

Después de que los valores  $f_w$ ,  $\xi$  y  $\varphi$  son calculados sucesivamente para la modalidad analizada, para el caso de una función con una única modalidad aislada, la amplitud  $A$  puede ser calculada exactamente para el punto inicial de la ventana de análisis, según se muestra en la Fig. 11.

Calculando la transformada de Fourier en el punto  $f_w$ , puede obtenerse la ecuación para la amplitud  $A$ , en la cual  $F$  indica una transformada sencilla de Fourier.

En el caso en que otras modalidades influyen sobre el resultado del cálculo, el valor  $A$  calculado en la primera aproximación a partir de la ecuación de la Fig. 12 es corregido en las aproximaciones posteriores, eliminando las modalidades restantes calculadas en la aproximación previa.

#### Determinación de vibraciones de aleteo

El uso del procedimiento de los mínimos cuadrados de errores en el dominio del tiempo lleva a un conjunto de ecuaciones en el dominio de la frecuencia. Las ecuaciones individuales de ese conjunto de ecuaciones corresponden a propiedades de transformaciones de Fourier en puntos sucesivos  $f_{w1}$ ,  $f_{w2}$ , ...,  $f_{wp}$ . En estos puntos, la transformación de la señal  $y(t)$  es una suma vectorial de transformaciones de formas modales de vibraciones. En estas sumas, la modalidad que tiene la frecuencia que coincide con los valores sucesivos de  $f_w$  juega un papel dominante.

Por lo tanto, como primera aproximación, puede suponerse que las modalidades están adecuadamente aisladas y que sus parámetros pueden ser calculados independientemente de las otras modalidades.

Para tales modalidades aisladas, pueden compilarse fórmulas precisas para determinar los parámetros individuales:  $f_w$ ,  $\xi$ ,  $\varphi$  y  $A$ . La secuencia del cálculo de estos parámetros no debería ser aleatoria. Los parámetros serán calculados exactamente en este orden:  $f_w$  debe ser conocido para calcular  $\xi$ ;  $f_w$  y  $\xi$  deben ser conocidos para calcular  $\varphi$ ; y  $f_w$ ,  $\xi$  y  $\varphi$  deben ser conocidos para calcular la amplitud  $A$ .

Antes de calcular los parámetros de la segunda modalidad de vibraciones en la primera aproximación, la primera modalidad calculada puede ser eliminada de la señal (restada) a fin de eliminar su influencia sobre los picos de resonancia vecinos. La segunda modalidad, habiendo sido calculada, también puede ser eliminada de la señal antes de calcular la tercera modalidad, etc.

En la segunda aproximación, antes de calcular la primera modalidad, todas las modalidades restantes calculadas en la

primera aproximación son eliminadas de la señal a fin de evitar su influencia sobre la primera modalidad calculada. Después de que se calcula la primera modalidad en la segunda aproximación, se elimina de la señal de origen y se eliminan asimismo las modalidades tercera y posteriores, obtenidas de la primera aproximación. A continuación, se calcula la segunda modalidad en la segunda aproximación.

- 5 Las reglas anteriores se mantienen en aproximaciones adicionales. Después de que se elimina la modalidad sucesiva, se calcula la suma de restos de cuadrados (RSS) en la próxima aproximación. El valor de la RSS se usa para evaluar la relevancia de las modalidades individuales de vibraciones.

Para las señales efectivas, la manera adecuada de calcular una modalidad es partir de la modalidad que tenga el más bajo valor de  $f_w$ , debido a su máxima contribución a la variabilidad total.

- 10 Las modalidades de vibraciones a clasificar como relevantes son las modalidades que, cuando son restadas de la señal de las vibraciones, dan como resultado una disminución de la suma de restos de cuadrados (RSS), en un valor no menor que un coeficiente de umbral, por ejemplo, del 5%.

- 15 Para respuestas de impulso típicas y modélicas, los resultados del cálculo son correctos. La exactitud de los cálculos depende de la frecuencia de muestreo de la señal temporal y de la longitud de la señal (del tiempo de atenuación de la señal). El tiempo de los cálculos es inferior a un segundo.

Un procedimiento para calcular una estimación de auto-correlación

Las señales de vibraciones pueden ser analizadas directamente, o por el análisis de su función de auto-correlación.

- 20 El procedimiento de acuerdo a la presente invención utiliza el cálculo de la estimación de la auto-correlación en base a segmentos finitos de vibraciones, lo que preserva los valores de los coeficientes de amortiguación de la señal de las vibraciones, y es adecuado para señales no estacionarias. Además de las señales estacionarias, puede haber señales libremente decadentes o señales crecientes. Es una herramienta adecuada para el denominado análisis de tiempo y frecuencia, para la evaluación de las propiedades momentáneas de señales no estacionarias.

- 25 Una nueva estimación de la función de auto-correlación ha sido empleada en el procedimiento de acuerdo a la invención, lo que elimina los errores metodológicos de la evaluación de los coeficientes de amortiguación, conocidos a partir de las estimaciones usadas hasta ese momento.

La nueva estimación se basa en el hecho de que, con un segmento medido y muestreado de vibraciones, las primeras  $N/2$  muestras son recogidas y desplazadas a lo largo del segmento entero. Después de cada desplazamiento en una muestra, los valores de muestras acumuladas entre sí se multiplican y se suman los productos 1 a  $N/2$ . La suma obtenida se divide entre  $N/2$ .

- 30 Para un desplazamiento cero, se obtiene el primer punto de la estimación de auto-correlación  $R_{yy}(0)$ . Los puntos del segmento desplazado, con el tamaño  $N/2$ , han sido situados exactamente sobre la primera mitad del segmento completo.

El último punto de la estimación propuesta se obtiene cuando el segmento desplazado está situado exactamente sobre la segunda mitad del segmento completo de vibraciones ( $R_{yy}(N/2)$ ).

- 35 Para un vector de señal de vibraciones con un tamaño de  $N$  puntos, se obtienen  $N/2 + 1$  puntos de estimación de la función de auto-correlación (cuando  $N$  es par).

Teniendo en cuenta las propiedades de una señal dada, puede aumentarse la longitud del segmento desplazado. En tal caso, se obtiene un segmento más corto de la función de auto-correlación. A su vez, reduciendo la longitud del segmento que se desplaza, se aumenta la longitud de la función de auto-correlación obtenida.

- 40 Si se usa una Transformada Rápida de Fourier (FFT) para calcular la función de auto-correlación, entonces  $N$  satisfará el requisito de  $N = 2^m$ , donde  $m$  es un número natural.

La estimación propuesta de la función de auto-correlación puede ser formulada en forma de una suma con el uso de la ecuación (12) mostrada en la Fig. 15.

- 45 La estimación propuesta de la función de auto-correlación puede ser formulada en forma de una integral con el uso de la ecuación (13) mostrada en la Fig. 16.

Un ejemplo de las reglas para calcular una función de auto-correlación para una función  $y(t) = \exp(-At)$  se muestra en la Fig. 13A. La línea continua indica la función  $y(t)$ . La línea discontinua indica la primera mitad de la señal  $y(t)$ , desplazada a lo largo del eje del tiempo. El primer punto de la función de auto-correlación se obtiene para  $T = 0$ , y el último para  $T = T$ .

A su vez, en la Fig. 13B se muestra un conjunto ejemplar de reglas para calcular la función de auto-correlación para la función  $y(t) = \exp(-\lambda t)$ , con el uso de la Transformada Rápida de Fourier (FFT). La línea continua indica una función periódica  $y(t)$  con período  $2T$  y la línea discontinua indica una función periódica  $y(t)$  desde 0 a  $T$ , rellenada con ceros desde  $T$  a  $2T$ .

5 Demostración de que el nuevo procedimiento para calcular la estimación de auto-correlación es adecuado

Para los procedimientos de la técnica anterior, usados para una señal de vibraciones infinitamente largas, se ha mostrado que la función de auto-correlación puede reemplazar la función desconocida de respuesta de impulso del objeto evaluado.

10 Al demostrar que una función de auto-correlación puede reemplazar la función desconocida de la respuesta de impulso del objeto evaluado, fue necesario calcular una integral infinita (desde 0 a  $+$ ) de un producto de dos respuestas de impulso. El resultado de esta acción fue una respuesta de impulso que preserva los valores modales naturales (frecuencia y coeficiente de amortiguación).

El estimador integral propuesto (ecuación 3) también preserva los valores naturales (frecuencia y coeficiente de amortiguación), incluso en base a una señal de vibraciones finitas, lo que se demostrará más adelante.

15 Puede suponerse una respuesta de impulso en la forma de la ecuación (14) mostrada en la Fig. 17. Los cálculos adicionales se muestran en la Fig. 18. Las ecuaciones integrales se muestran en la Fig. 19 y su uso para el cálculo de la función se muestra en la Fig. 20.

La ecuación analítica para la función de auto-correlación también puede escribirse en la forma (15), según se muestra en la Fig. 21.

20 Formalmente, el tiempo en la ecuación (15) puede ser indicado como "t" en lugar de "T". Puede verse inmediatamente que la estimación de la función de auto-correlación  $R_{yy,T}(T)$ , según lo calculado de acuerdo al procedimiento propuesto, es una señal libremente decadente que tiene el mismo coeficiente  $\xi$  de frecuencia de amortiguación y el mismo valor  $\omega_d$  de frecuencia natural que la señal procesada  $y(t)$ .

25 El coeficiente constante  $A$  ha sido reemplazado por una constante  $C$ , y la fase  $\phi = 0$  al principio de la señal ha sido reemplazada de acuerdo a la ecuación (16): para una señal no atenuada, cuando  $\xi = 0$ , la fase de tal senoide es igual a  $\pi/2$  rad. La senoide no atenuada es reemplazada por una cosenoide no atenuada, según se deduce de la teoría.

Debe observarse que se ha obtenido un resultado correcto, es decir, la preservación de propiedades naturales para una señal de respuesta de impulso finito: para una señal no estacionaria.

30 La ecuación (16) define que la fase inicial de la función de auto-correlación es dependiente, sin ambigüedad, del coeficiente de amortiguación. Para una señal desvaneciente  $y(t)$ , la señal de auto-correlación comienza con su valor máximo. Por ejemplo, para  $\xi = 0,015$ , la función de auto-correlación expresada como una función seno comienza con una fase inicial de  $\phi = 1,5558$  rad. Para una señal creciente  $y(t)$ , su función de auto-correlación no comienza con su máximo (la función también es una función creciente). Por ejemplo, para  $\xi = -0,015$ , la fase inicial es  $\phi = 1,5858$  rad. La senoide atenuada de la fase inicial  $\phi = 0$  tiene su primer máximo para una fase  $\phi = \arccos\xi$ . Los máximos adicionales caen en los puntos  $\phi + n \cdot 2\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Con referencia nuevamente a la ecuación analítica obtenida para la función de auto-correlación (15), en la Fig. 14 se muestra un gráfico ejemplar de una señal desvaneciente de acuerdo a la ecuación (14), indicada con una línea continua, y su función de de auto-correlación, indicada con una línea discontinua, para  $A = 1$ ,  $\xi = 0,015$  y  $f_d \approx f_0 = 10,6$  Hz.

40 Para  $T = 1s$ , la función de auto-correlación (la línea discontinua) se calcula solamente en el intervalo de  $0 \leq T \leq T/2$ . El valor del coeficiente de amortiguación  $\xi$  y la frecuencia  $f_d$  de la señal de auto-correlación son los mismos que para la señal  $y(t)$ . Ha habido un cambio en la amplitud y en la fase inicial.

45 El análisis de la ecuación (14) lleva a la conclusión de que, para  $\xi = 0$  y  $A = 2$ , la amplitud de la función de auto-correlación permanece igual:  $C = 2$ . En general, para amplitudes  $A$  mayores que 2, las amplitudes aumentan, en línea con la ecuación (15), y las amplitudes menores que 2 disminuyen. Esta es una característica ventajosa de la función de auto-correlación, ya que facilita la descomposición de la señal de respuesta de impulso supuesto o de otras señales libremente decadentes y señales de vibraciones durante el funcionamiento normal de un avión en vuelo. El ruido blanco es prácticamente eliminado por completo, y la función de auto-correlación es más llana que la señal de vibraciones de origen.

50 Se mostrará ahora a continuación cómo utilizar el procedimiento propuesto para calcular la función de auto-correlación para una señal desvaneciente con longitud infinita cuando  $T \rightarrow \infty$ .

Ha de considerarse una integral de acuerdo a la ecuación (17) mostrada en la Fig. 22, en la que  $y(t)$  es una señal de acuerdo a la ecuación (14).

Los resultados del cálculo se muestran en la Fig. 23.

5 Como puede verse, el procedimiento propuesto para calcular la función de auto-correlación transforma una señal infinita exponencialmente desvaneciente en una señal infinita de la misma frecuencia y del mismo coeficiente de amortiguación.

Suponiendo la misma señal de acuerdo a la ecuación (14), definida en un intervalo finito  $0 \leq t \leq T$ , y calculando con el uso del estimador actual "no sesgado" de la función de auto-correlación (1), es decir, calculando una integral de acuerdo a la ecuación (18) en la Fig. 24, se llega a un resultado de la forma mostrada en la Fig. 25.

10 Un gráfico temporal para valores de acuerdo a la ecuación (19) en la Fig. 25 se muestra en la Fig. 26: la curva C coincide con la curva B de acuerdo a la ecuación mostrada en la Fig. 19.

15 En este ejemplo, el estimador de la función de auto-correlación es la función resultante de la multiplicación de una senoide exponencialmente desvaneciente y de una función creciente C, que en este ejemplo reduce la velocidad de desvanecimiento de la senoide y cambia su naturaleza de variación en el tiempo: no es desvanecimiento puramente exponencial.

La Fig. 27 muestra un gráfico de una señal  $y(t)$  de acuerdo a la ecuación (14) (línea continua) y un gráfico de su función de auto-correlación  $R_{yy, T-T}$  (línea discontinua) para  $T = 1$  s. Como puede verse, la función de auto-correlación se desvanece más lentamente que la señal  $y(t)$ , y tiene un menor coeficiente de amortiguación.

20 Las integrales  $C_{12}$  y  $C_2$  han sido resueltas anteriormente para un caso que simplifica significativamente la forma del resultado, es decir, para un caso el que  $T = k T_{okr}$ . Esta simplificación, sin embargo, no introdujo errores visibles en el cálculo mostrado en la Fig. 26. En este ejemplo específico, los resultados numéricos difieren solamente en el cuarto dígito más significativo.

25 A fin de simplificar las fórmulas y aumentar su claridad, se han adoptado las notaciones  $\lambda$  y  $\omega$  según se muestran en la Fig. 28, así como una ecuación para una integral  $C_{11}$ , también mostrada en la Fig. 28. La integral  $C_{11}$  tiene un significado crucial en la forma analítica de la función de auto-correlación. La formulación de la ecuación para la integral  $C_{12}$  se muestra en la parte adicional de la Fig. 28. En la integral  $C_{12}$ , el valor bajo la raíz en el denominador es tan alto, en comparación con los valores en el nominador, que la integral  $C_{12}$  es despreciable en comparación a la integral  $C_{11}$  para datos típicos de mediciones.

30 La forma de la integral  $C_2$ , mostrada en la parte subsiguiente de la Fig. 28 para cualquier valor de T, también es despreciablemente pequeña en comparación con la integral  $C_{11}$ .

Insertando los valores de las integrales en la ecuación para el valor de la función de auto-correlación, se obtiene la ecuación mostrada en la Fig. 19. Insertando en esta ecuación las correspondientes ecuaciones para  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  y  $C_2$ , se obtiene una ecuación para la evaluación de la amplitud B. Puede examinarse si la amplitud B es independiente del desplazamiento  $\tau$ , o si depende de  $\tau$ , y cómo.

35 Si  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  y  $C_2$  son sustituidas de acuerdo a las fórmulas en la Fig. 28, donde el límite superior de integración es constante y es igual a T, como se propone en el procedimiento para el cálculo de la función de auto-correlación, entonces todas las fórmulas son valores constantes, independientes de  $\tau$ , y la amplitud B es constante. En la función de auto-correlación resultante, se preserva el coeficiente  $\xi$  de amortiguación de vibraciones.

40 Si en las fórmulas  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  y  $C_2$  se sustituye, en lugar de la constante T, un límite de integración variable  $T - \tau$ , como en el procedimiento clásico para calcular la función de auto-correlación, entonces la amplitud B es un valor dependiente del desplazamiento  $\tau$ . La Fig. 26 muestra, con fines ejemplares, la amplitud B como una función del desplazamiento  $\tau$  para valores dados de A, f y  $\xi$ .

Para una señal analítica infinita (Fig. 22), puede obtenerse una función de auto-correlación en la forma mostrada en la Fig. 30.

45 La expresión (19) define un valor constante y, por lo tanto, la función de auto-correlación calculada preserva el coeficiente  $\xi$  de amortiguación de la señal analizada  $y(t)$ .

#### Requisitos con respecto a la evaluación de los coeficientes de amortiguación de vibraciones

50 Las normas de aviación requieren que, para las vibraciones estructurales de un avión en vuelo, los coeficientes  $\xi$  de amortiguación, para las modalidades de vibraciones que son relevantes para el aleteo, deberían ser mayores que 0,015.

5 Como se sabe, físicamente, el coeficiente  $\xi$  está relacionado, de forma no ambigua, con la disminución en las amplitudes de la respuesta de impulso, y a la disminución en las vibraciones libremente decedentes, de acuerdo a la ecuación en la Fig. 31. Esto muestra que los requisitos de regulación pueden ser formulados de la siguiente manera: cada una de las vibraciones excitadas, y luego libremente decedentes, de una estructura de avión en vuelo, debería desvanecerse con una disminución en la amplitud de alrededor del 10% durante un único periodo de vibraciones.

Para el valor del coeficiente  $\xi = 0,707$ , cada desviación de la configuración a partir de un punto de equilibrio da como resultado un retorno lento al punto de equilibrio, sin vibraciones. Un tal valor de amortiguación de vibraciones puede suponerse para la evaluación del error relativo de medición del coeficiente de amortiguación.

10 La medición del valor de  $\xi = 0,015 \pm 0,005$  significa que un error de medición relativo es del 0,7%. El valor del coeficiente  $\xi$  de amortiguación también se da en porcentaje. El resultado de la medición de  $\xi = (1,5 \pm 0,7)\%$  significa una medición con un error relativo del 1%.

15 Se requiere normalmente tener, en un segmento de vibraciones analizadas, al menos 10 periodos de vibraciones con una máxima frecuencia evaluada  $f_g$ , y tener en el intervalo inferior de las vibraciones  $f_d$  al menos 20 muestras de la señal evaluada en un único periodo de vibraciones. Por lo tanto, si la banda de vibraciones de interés está, por ejemplo, entre  $f_d = 5$  Hz y  $f_g = 50$  Hz, entonces el análisis debería incluir al menos 2.000 muestras, la frecuencia de muestreo  $f_{pr}$  debería ser de 1.000 muestras por segundo y el segmento de vibraciones analizadas debería tener una duración de 2s. En general, el número de muestras debería alcanzar  $N \geq 200 * f_g / f_d$ . Estos requisitos permiten calcular la función de auto-correlación con un error de alrededor del 2%.

#### Hipótesis y reglas durante la evaluación del aleteo en vuelo

20 El uso de la función de correlación pertenece a un grupo de procedimientos basados en la experimentación pasiva, es decir, basados en la observación pasiva de emisiones de objetos sin comprometer las circunstancias naturales del funcionamiento de objetos.

25 En este procedimiento, se supone que el objeto en prueba es lineal y que tiene coeficientes constantes, invariables en el tiempo. Se supone que las señales de entrada y las interferencias son procesos estacionarios, ergódicos y estocásticos.

Los procesos estacionarios son procesos estocásticos que tienen un valor esperado constante, independiente con respecto al tiempo, una variación temporal constante y una función de auto-correlación independiente con respecto al tiempo, y dependiente solamente del desplazamiento  $\tau$ .

30 En el caso de vibraciones de avión, la linealidad del objeto, es decir, la invariabilidad del coeficiente de amortiguación y de la frecuencia de vibraciones naturales, no se logra por completo.

Las frecuencias naturales de las alas en vuelo cambian junto con la cantidad de combustible en los tanques de combustible integrales, o debajo de las alas. En aviones de entrenamiento, el cambio alcanza, aproximadamente, el 10%. Inicialmente, las frecuencias son menores y, al final, mayores, de acuerdo al cambio en el peso.

35 En tal caso, la medición aconsejada de larga duración no tiene ningún sentido. Esto llevaría a promediar los valores efectivos, por ejemplo, de 11 Hz al comienzo del vuelo y de 12 Hz al final del vuelo, hasta el valor de 11,5 Hz.

Por lo tanto, sería ventajoso proporcionar procedimientos para la identificación, tales que permitan la evaluación adecuada de la amortiguación y la frecuencia para segmentos breves de señales de vibraciones. Este es el objetivo del trabajo presentado en la presente memoria. Este requisito también es ventajoso para la industria, donde se necesita la evaluación en vuelo en tiempo real de la ausencia de aleteo de un avión.

40 En la práctica, es posible usar un procedimiento que esté basado en el análisis momentáneo de segmentos breves de una señal, y que implique además el cálculo de un promedio exponencial. Un promedio de ese tipo disminuye el peso de los resultados de mediciones previas, según se muestra en la ecuación de la Fig. 32. Cuanto mayor sea el valor de  $M$ , mayor es el peso de las mediciones más antiguas y, en consecuencia, menor es el nivel de "olvido" de mediciones más antiguas.

45 Para una evaluación completa, es ventajoso almacenar en una memoria de ordenador todos los cálculos de origen, sin calcular promedios, y la visualización en vuelo de los valores promediados, linealmente y exponencialmente.

Los valores promediados linealmente muestran cuál es el valor medio desde el inicio de la medición, hasta el momento actual. Presentan un posible aumento o reducción en la amortiguación con un retardo significativo.

50 Por lo tanto, en pruebas de aleteo se prefiere el promedio exponencial, porque presenta rápidamente la posible disminución en la amortiguación, lo que debería ser una advertencia para la tripulación del avión.

Lo mismo concierne a las reglas de registro y visualización de las frecuencias naturales (estructurales) o las vibraciones armónicas, que son excitadas, por ejemplo, por las hélices.

Si las vibraciones naturales de una estructura de avión son probadas en vuelo, entonces las mediciones deberían hacerse con una velocidad y altitud constantes.

- 5 El aumento en la velocidad de vuelo durante las mediciones se relaciona normalmente con el aumento en el nivel de vibraciones, lo que puede reducir los coeficientes de amortiguación efectivos. Por otra parte, la medición de vibraciones durante la reducción constante de la velocidad de vuelo puede llevar a una disminución de los valores efectivos de los coeficientes de amortiguación.

- 10 En la práctica, los vuelos de prueba se hacen para varias altitudes distintas, y con velocidades de vuelo predeterminadas, gradualmente crecientes, para abarcar el intervalo completo de altitudes y velocidades de vuelo concebidas para el avión en prueba, con un cierto sobregasto para garantizar la seguridad durante el funcionamiento normal.

Aceleración de los cálculos con la ayuda de la transformada de Fourier

- 15 Durante las pruebas en vuelo de un avión, se necesita calcular lo siguiente, en base a datos procedentes de varias docenas de sensores de vibraciones: amplitudes de vibraciones, coeficientes de amortiguación de las modalidades relevantes de vibraciones y desplazamientos de fase entre puntos individuales en el avión. Además, deberían visualizarse las modalidades de vibraciones relevantes para el aleteo. La relevancia de los parámetros calculados debería ser evaluada y deberían ser ejecutadas ciertas tareas, tales como la adquisición, los cálculos y los análisis de datos. Estos cálculos requieren miles de transformaciones de Fourier, por ejemplo, por segundo, si un retardo de ese tipo es admisible para los cálculos realizados en tiempo real.

Durante las pruebas de aleteo, no deberían presentarse las modalidades modales de vibraciones. Las modalidades de vibraciones de aleteo son usualmente modalidades que comprenden dos o tres modalidades modales de vibraciones, por ejemplo, formas de torsión-flexión de vibraciones o vibraciones de torsión del plano de la cola, conectadas con la flexión de la parte trasera del fuselaje, y con un movimiento desplazado en fase del elevador de la misma frecuencia.

- 25 Por lo tanto, es más importante rastrear las denominadas modalidades operativas de las vibraciones, es decir, la visualización de modalidades de vibraciones en aquellos puntos del espectro de vibraciones donde las amplitudes son máximas. Puede verse entonces si estas son vibraciones peligrosas de la naturaleza de un aleteo, o solamente vibraciones fuertemente excitadas por la turbulencia aérea, por ejemplo, formas de flexión de las vibraciones de las alas.

- 30 Puede alcanzarse una velocidad adecuada de los cálculos calculando una Transformada Rápida de Fourier, Por ejemplo, la función de auto-correlación  $R_{yy}(k)$ , para realizar el proceso estocástico  $y(n)$ , puede ser calculada usando la ecuación (20) mostrada en la Fig. 33.

En este ejemplo, la transformada inversa se calcula para un producto de la transformación  $Y(j)$  y de la transformación conjugada  $Y^*(j)$ , calculada para una señal de medio pulso  $yp(n)$ .

- 35 El cálculo de la función de auto-correlación, usando este procedimiento, es, para  $N = 1.024$ , dos veces más rápida y, para  $N = 2.048$ , cuatro veces más rápida.

Aumento de la resolución de los cálculos

- 40 La Fig. 34 muestra una ecuación frecuentemente usada para calcular una transformada discreta de Fourier. Si el segmento muestreado de una señal de vibraciones es indicado como  $T = N \cdot \Delta t$ , en la que  $\Delta t$  es el periodo de muestreo de la señal  $y(t)$ , entonces la resolución del espectro discreto resultante en Hz es  $\Delta f = 1/T$ . A fin de lograr una alta resolución, es decir valores bajos de  $\Delta f$ , son necesarios segmentos largos de vibraciones. Sin embargo, los segmentos largos de vibraciones retardan la obtención de los resultados del análisis.

- 45 A fin de aumentar la resolución del espectro de vibraciones, las muestras de una señal pueden ser sometidas al relleno con ceros. El intervalo de altas frecuencias depende de la frecuencia de muestreo de señales y por tanto no será cambiada.

Si la transformación modificada se usara solamente para buscar los máximos espectrales locales (picos de resonancia), entonces el relleno con ceros puede aumentarse. El relleno con ceros ha sido verificado en la práctica para  $N$  muestras con  $N$ ,  $3N$ ,  $7N$  y  $15N$  ceros. Tal relleno con ceros satisface el requisito para  $N_{\text{suma}} = 2^j$ , donde  $N = 2^j$  e  $l = 1, 2, 3, \dots$

- 50 Por medio de este procedimiento, después de la adquisición de las muestras de la señal analizada durante 1 s, los cálculos de una transformación sobre una señal modificada, de una longitud de 16 s, pueden ser realizados para recibir

casi instantáneamente un resultado de resolución  $\Delta f = 0,0625$  Hz, en lugar de  $\Delta f = 1$  Hz. Sin embargo, debe observarse que se obtendrá un resultado correcto del análisis a partir de la frecuencia  $f = 1$  Hz, cuando las  $N$  muestras de señal estén dentro de un único periodo de vibraciones, como ocurre en el procedimiento de cálculo de la FFT.

5 Si, en los ejemplos anteriores, es deseable obtener un espectro de vibraciones entre 1 Hz y 50 Hz, entonces la señal evaluada puede ser muestreada con una frecuencia  $f_{pr} = 128$  muestras / s. En este ejemplo,  $N = 128$ ,  $N_{suma} = 2.048$ .

El intervalo espectral entre 1 Hz y 50 Hz es suficiente para pruebas de aleteo en vuelo para una mayoría de aviones y planeadores (para planeadores y grandes aviones de pasajeros: entre 2 Hz a 10 Hz, para aviones de entrenamiento: entre 5 Hz y 50 Hz, para aviones militares: entre 10 Hz y 60 Hz).

#### Aceleración del cálculo de la Transformada Rápida de Fourier

10 En la presente invención, un procedimiento estándar para calcular una Transformada Rápida de Fourier ha sido modificado para acelerar el tiempo de cálculo de las vibraciones presentes en un avión, es decir, las vibraciones que tienen una frecuencia entre varios Hz y varias docenas de Hz. El algoritmo modificado para calcular una Transformada Rápida de Fourier se presenta en la Fig. 35.

15 Durante las mediciones de aleteo en vuelo, hay frecuentemente una necesidad de calcular una transformada de Fourier solamente en ciertos puntos del espectro de vibraciones.

El nuevo algoritmo de acuerdo a la invención está basado en el conocido algoritmo de Murphy McCauley VBFFT (1999).

20 El cambio principal introducido es que, en la primera ejecución del análisis durante el vuelo, se calcula una tabla de valores de funciones seno y coseno, y estos valores son almacenados como  $sn(mb)$  y  $cs(mb)$ . Durante los cálculos de transformación, el algoritmo modificado captura los valores preparados desde la tabla en las etapas definidas por las líneas 13 y 14.

#### Visualización de vibraciones

25 La Fig. 36 presenta una visualización ejemplar de modalidades operativas de las vibraciones obtenidas por el procedimiento de acuerdo a la presente invención. La visualización ilustra una colocación de referencia 101 de elementos estructurales del avión con los sensores 102, marcados con una línea continua, y la colocación efectiva, en vuelo, de los sensores 112 y las desviaciones 111 de los elementos estructurales del avión, resultantes de la colocación efectiva, marcadas con una línea discontinua. La visualización puede ser presentada en color, de modo que las colocaciones efectivas estén marcadas con una línea verde cuando no se detectan vibraciones excesivas, y con una línea roja cuando se superan los valores de umbral. Esto permite la evaluación inmediata del comportamiento de los elementos estructurales del avión en vuelo. En la visualización presentada, es visible una torsión del extremo del fuselaje, como resultado de un equilibrio inadecuado del timón: un movimiento del timón retardado en fase con respecto al plano de cola horizontal tiene el carácter de vibraciones de aleteo con amplitud restringida. Además de tal visualización, para cada sensor pueden presentarse: la frecuencia de vibraciones, la amplitud de vibraciones y la amplitud de velocidad de vibraciones. Además, las amplitudes pueden ser presentadas en comparación con la amplitud en un punto de referencia.

30

35

A fin de obtener tal visualización en vuelo, en tiempo real, es decir, en un tiempo de menos de un segundo desde la medición, es necesario utilizar el nuevo procedimiento de análisis de vibraciones. El procedimiento de acuerdo a la presente invención se basa en el análisis de regresión no lineal, apoyándose en el procedimiento de mínimos cuadrados de los errores de señales temporales.

40 En el caso del análisis de señales de vibraciones durante el vuelo normal, sin excitar las vibraciones aumentadas con el uso de dispositivos adicionales, la función de auto-correlación se calcula con el procedimiento formulado para señales no estacionarias con una duración finita, lo que no cambia los valores de los coeficientes de amortiguación de las señales medidas.

#### Sistema para llevar a cabo el procedimiento de acuerdo a la presente invención

45 El procedimiento de acuerdo a la presente invención puede ser llevado a cabo por medio de un sistema de ordenador mostrado en la Fig. 37. El sistema comprende los circuitos de procesamiento de señales 201 para procesar señales procedentes de los sensores de vibraciones 202, situados en una estructura de avión. Los circuitos de procesamiento de señales utilizan, durante el funcionamiento, la memoria 203 para almacenar mediciones y la memoria caché 204 para almacenar variables en memoria caché, por ejemplo, los valores de funciones seno y coseno, para mejorar la velocidad del cálculo de la Transformada Rápida de Fourier, de acuerdo al algoritmo de la Fig. 35. Los circuitos de procesamiento de señales 201 pueden ser circuitos integrados dedicados, optimizados para realizar ciertos cálculos. Los circuitos de procesamiento de señales 201 también pueden ser implementados en un típico ordenador de tipo PC,

50

5 con el software para llevar a cabo los procedimientos divulgados en lo que antecede. El sistema es operado por una interfaz de control 205, mediante la cual puede ser configurado el funcionamiento actual del sistema. Los resultados del análisis pueden ser presentados en un monitor 206 y almacenados en una memoria de resultados 207. El sistema completo puede ser instalado a bordo de un avión. El sistema también puede ser instalado parcialmente a bordo de un avión y parcialmente en tierra, en donde las señales intercambiadas entre los elementos a bordo y en tierra del sistema pueden ser intercambiadas de manera inalámbrica, por medio de un enlace de un ancho de banda suficiente.

REIVINDICACIONES

1. Un procedimiento implementado por ordenador para la evaluación en vuelo de la ausencia de aleteo de un avión, que implica el análisis de las vibraciones estructurales del avión, en base a señales no estacionarias que tienen una duración finita, indicadas por sensores situados en la estructura del avión, en el que los cálculos son realizados en tiempo real, en base a datos de mediciones actuales recogidos desde los sensores, y en el que, para datos de mediciones a partir de sensores individuales, se determinan formas modales de vibraciones, determinando para cada forma modal una frecuencia natural (f), un coeficiente de amortiguación ( $\xi$ ), una fase ( $\varphi$ ) y una amplitud (A), usando el procedimiento de mínimos cuadrados de errores de señales temporales, en el que la importancia de las modalidades de vibraciones se determina restando de la señal de vibraciones la modalidad específica de vibraciones y calculando el valor de la disminución en la suma de restos de cuadrados, **caracterizado porque** las vibraciones son evaluadas analizando estimaciones de la función de auto-correlación para señales de vibraciones operativas, en el que la función de auto-correlación  $R_{yy}(l)$  se calcula multiplicando un número constante de muestras, preferiblemente  $N/2$ , de la señal de vibraciones ( $y_n$ ), por segmentos sucesivos de la señal de vibraciones ( $y_n$ ), teniendo la señal de vibraciones un tamaño de N muestras, y sumando los resultados de acuerdo a la ecuación:

$$R_{yy}(l) = \frac{1}{N/2} \sum_{n=1}^{N/2} y_n \cdot y_{n+l}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N \quad l = 0, 1, 2, \dots, N/2$$

a fin de obtener una función de auto-correlación  $R_{yy}(l)$  con la longitud de una mitad del segmento evaluado de vibraciones, manteniendo a la vez los valores de los coeficientes de amortiguación de las señales no estacionarias que tienen una duración finita.

2. El procedimiento de acuerdo a la reivindicación 1, **caracterizado porque** la función de auto-correlación  $R_{yy}(l)$  se calcula con el uso de una Transformada Rápida de Fourier, de acuerdo a la ecuación

$$R_{yy}(k) = \frac{1}{N/2} FFT^{-1}[Y_{YYP}(j)] \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N/2 - 1$$

$$Y_{YYP}(j) = Y(j) YP^*(j) \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$Y(j) = FFT[y(n)]$$

$$YP(j) = FFT[yp(n)]$$

$$yp(n) = y(n) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

$$yp(n) = 0 \quad \text{para} \quad n = N/2 + 1, \dots, N$$

en las que  $n = 1, 2, 3, \dots, N$   $N = 2^i$ , en la que i es un número natural.

3. El procedimiento de acuerdo a la reivindicación 2, **caracterizado porque** el segmento muestreado de una señal con una longitud de N muestras es rellenado con ceros a fin de obtener una secuencia de salida con la longitud de  $N_{suma} = 2^i$ , en la que i es un número natural y la Transformada Rápida de Fourier se calcula para la secuencia de salida.

4. El procedimiento de acuerdo a la reivindicación 2, **caracterizado porque** la Transformada Rápida de Fourier se calcula usando tablas de valores de funciones seno y coseno, para ángulos dependientes del número de muestras y de la frecuencia de muestreo, preparados después del comienzo del sistema.

5. El procedimiento de acuerdo a la reivindicación 1, **caracterizado porque** se genera una imagen que visualiza las

vibraciones medidas por los sensores, como la imagen que comprende una imagen de la estructura del avión (101) y sus desviaciones (111) resultantes de las vibraciones, mientras que las desviaciones con parámetros por encima de valores de umbral están marcadas con un color distinto al color de las desviaciones con parámetros por debajo de valores de umbral.

5 6. El procedimiento de acuerdo a la reivindicación 5, **caracterizado porque** las vibraciones son visualizadas usando un procedimiento que implica el cálculo de un desplazamiento de fase, o un procedimiento que implica el cálculo de una fase de movimiento en puntos especificados en el tiempo.

10 7. Un sistema de medición para la evaluación en vuelo de la ausencia de aleteo de un avión equipado con sensores de vibraciones situados en la estructura del avión, **caracterizado porque** el sistema comprende circuitos de procesamiento de señales para realizar las etapas de procedimiento de acuerdo a las reivindicaciones 1 a 6.

8. Un programa de ordenador que comprende código de programa para realizar todas las etapas del procedimiento de acuerdo a las reivindicaciones 1 a 6 cuando el programa es ejecutado en un ordenador.

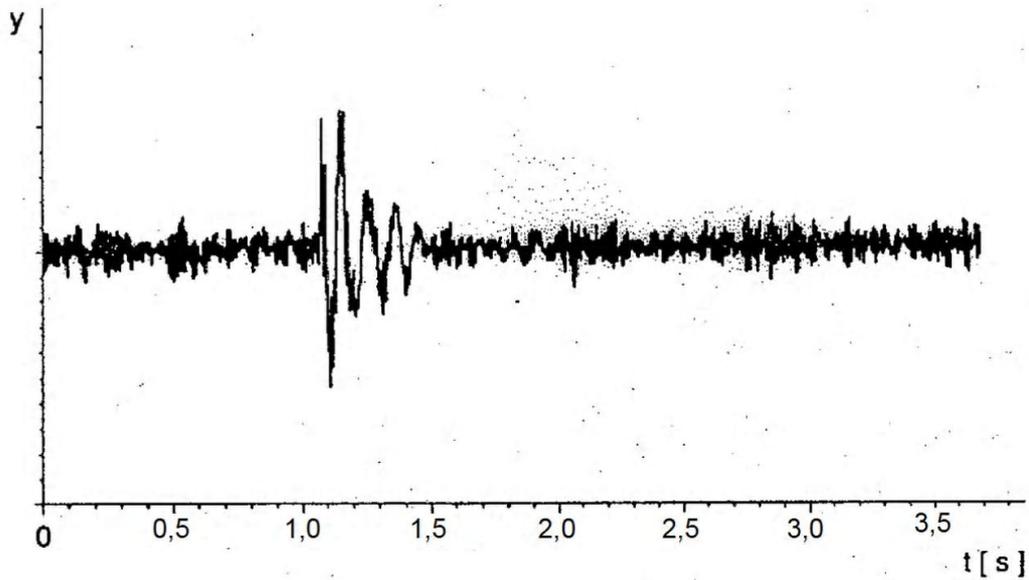


Fig. 1

$$R_{yy}(\tau) \approx \hat{R}_{yy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [y(t) - m_y][y(t+\tau) - m_y] dt \quad (1)$$

en la que  $m_y \approx \hat{m}_y = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$

Fig. 2

$$\hat{y}(t) = \sum_{p=1}^P A_p \exp(-\lambda_p t) \text{sen}(\omega_{wp} t + \varphi_p)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{p=1}^P \exp(-\lambda_p t) [a_p \cos(\omega_{wp} t) + b_p \text{sen}(\omega_{wp} t)]$$

$$\lambda_p = \zeta_p \omega_{0p} = \frac{\zeta_p}{\sqrt{1-\zeta_p^2}} \omega_{wp}$$

$$\omega_{wp} = \omega_{0p} \sqrt{1-\zeta_p^2}$$

en las que

- $\zeta_p$  – Coeficiente de amortiguación adimensional
- $\omega_{0p}$  – Frecuencia en rad de vibraciones naturales de la configuración sin amortiguación
- $\omega_{wp}$  – Frecuencia de vibraciones naturales con amortiguación, frecuencia de vibraciones libremente decedentes de la configuración con amortiguación

Para una configuración con un grado de libertad, descrita con una fórmula

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

Hay relaciones conocidas

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

La fórmula puede ser expresada en forma de:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Fig. 3

$$RSS = \sum_{n=0}^{N-1} [y(t_n) - \hat{y}(t_n)]^2$$

$$a_{pi} = a_p \exp(-\lambda_p t)$$

$$b_{pi} = b_p \exp(-\lambda_p t)$$

$$\lambda_p = \frac{\zeta_p}{\sqrt{1 - \zeta_p^2}} 2\pi f_{wp}$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial a_{pi}} = -2 \sum_{n=0}^{N-1} [y(t_n) - \sum_{p=1}^P (a_{pi} \cos \omega_{wp} t_n + b_{pi} \text{sen } \omega_{wp} t_n)] \cos \omega_{wi} t_n = 0$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial b_{pi}} = -2 \sum_{n=0}^{N-1} [y(t_n) - \sum_{p=1}^P (a_{pi} \cos \omega_{wp} t_n + b_{pi} \text{sen } \omega_{wp} t_n)] \text{sen } \omega_{wi} t_n = 0$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, P$ .

Cambiando el orden de la suma, obtenemos:

$$\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \hat{y}_{pn} \cos \omega_{wi} t_n = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos \omega_{wi} t_n \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (2)$$

$$\sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \hat{y}_{pn} \text{sen } \omega_{wi} t_n = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \text{sen } \omega_{wi} t_n \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (3)$$

Para mayor concisión de la fórmula, se ha definido lo siguiente

$$\hat{y}_{pn} = a_{pi} \cos \omega_{wp} t_n + b_{pi} \text{sen } \omega_{wp} t_n$$

$$y_n = y(t_n)$$

Fig. 4



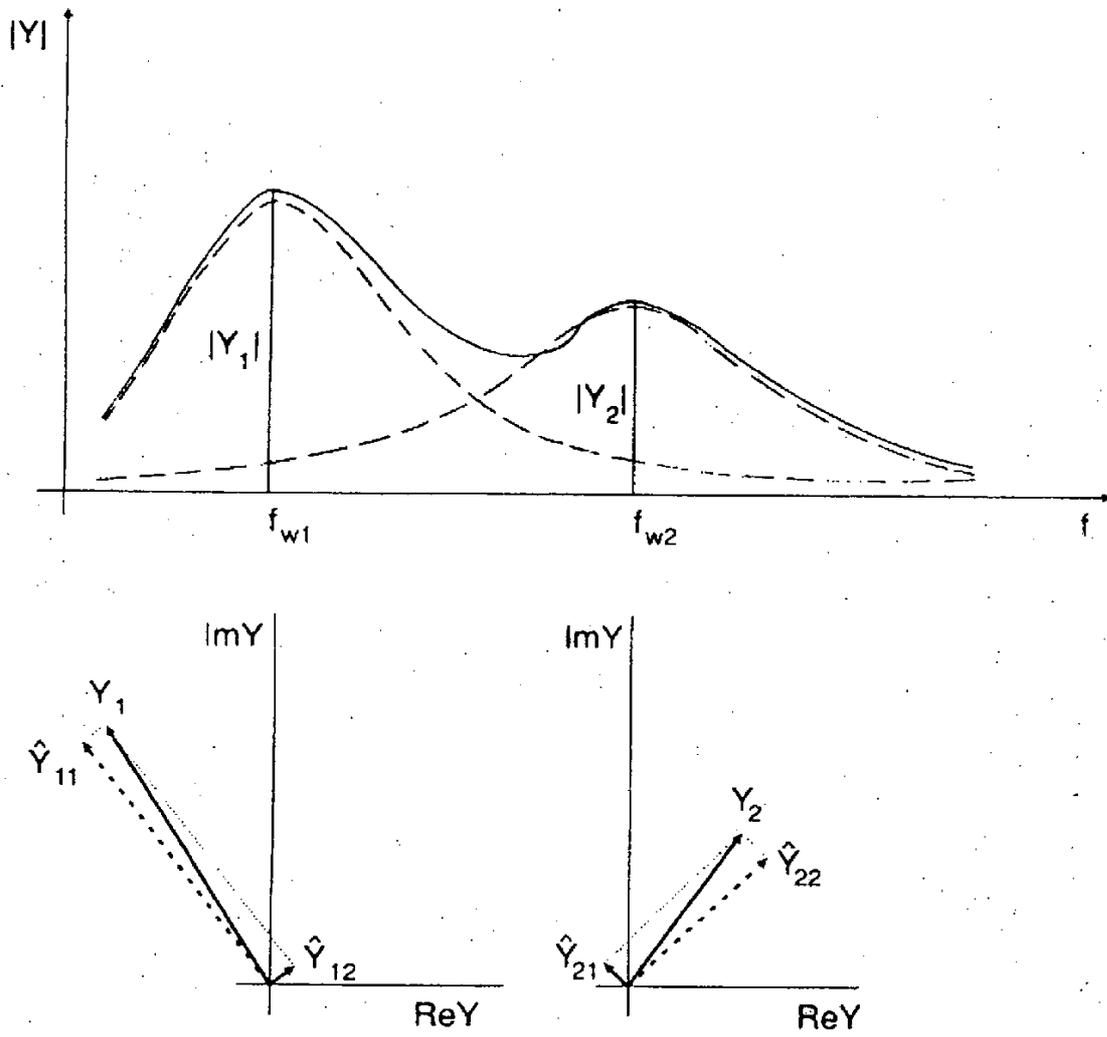


Fig. 6

$$\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_{12} = Y_1$$

$$\hat{Y}_{21} + \hat{Y}_{22} = Y_2$$

Para señales típicas, valen las siguientes relaciones:

$$|\hat{Y}_{11}| \gg |\hat{Y}_{12}| \quad \text{i} \quad |\hat{Y}_{22}| \gg |\hat{Y}_{21}|$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{w1,l} &= Y_{wi} \\ \hat{Y}_{w2,l} &= Y_{w2} \\ &\vdots \\ \hat{Y}_{wP,l} &= Y_{wP} \end{aligned} \quad (10)$$

Fig. 7

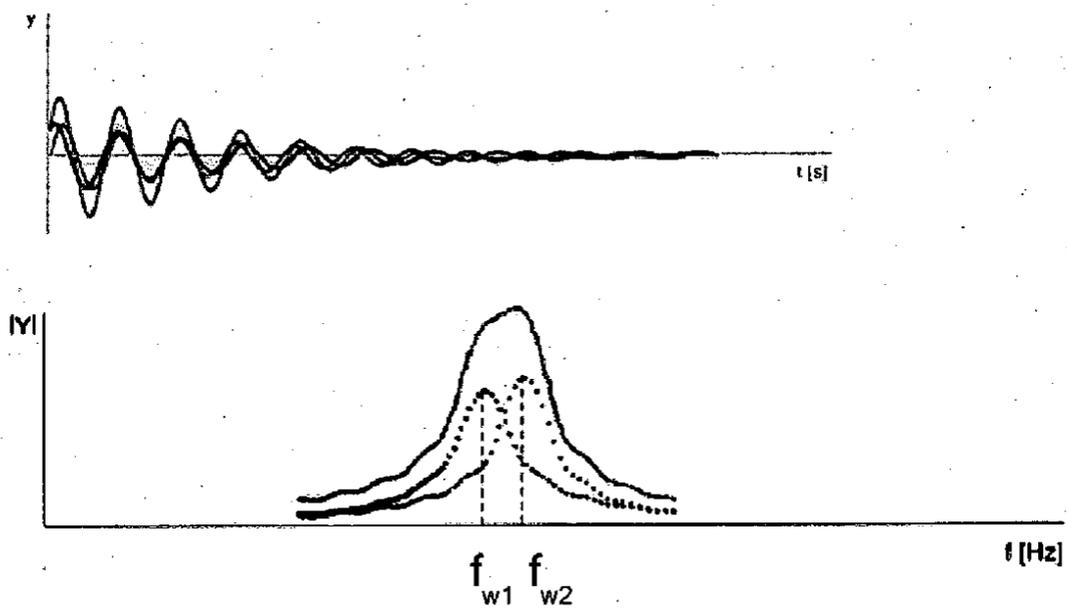


Fig. 8

$$y(t) = \cos(\omega_w t + \varphi)$$

$$Y(\omega_w) = \int_0^T \cos(\omega_w t + \varphi) \exp(-j\omega_w t) dt$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Re} Y(\omega_w) = \int_0^T (\cos \omega_w t \cos \varphi - \operatorname{sen} \omega_w t \operatorname{sen} \varphi) \cos \omega_w t dt$$

$$\operatorname{Im} Y(\omega_w) = -\int_0^T (\cos \omega_w t \cos \varphi - \operatorname{sen} \omega_w t \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \omega_w t dt$$

Para  $T = l \cdot T_{\text{cic}} = l \cdot \frac{2\pi}{\omega_w}$  Hay

$$\operatorname{Re} Y(\omega_w) = \frac{T}{2} \cos \varphi$$

$$\operatorname{Im} Y(\omega_w) = \frac{T}{2} \operatorname{sen} \varphi$$

Por lo tanto

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Y(\omega_w)}{\operatorname{Re} Y(\omega_w)}$$

De manera similar, para una función:

$$y(t) = \operatorname{sen}(\omega_w t + \varphi)$$

Se obtiene una relación:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} Y(\omega_w)}{-\operatorname{Im} Y(\omega_w)}$$

Fig. 9

$$y(t) = \exp(-\lambda t) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Fig. 10

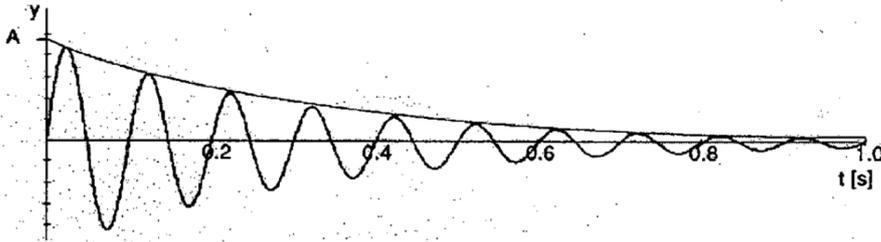


Fig. 11

Ejecutando una transformada de Fourier en el punto  $f_w$  para una función:

$$y(t) = A \exp(-\lambda t) \text{sen}(\omega_w t + \varphi)$$

Se obtiene una relación

$$A = \frac{|Y(\omega_w)|}{|F[\exp(-\lambda t) \text{sen}(\omega_w t + \varphi)]_{\omega_w}|}$$

Fig. 12

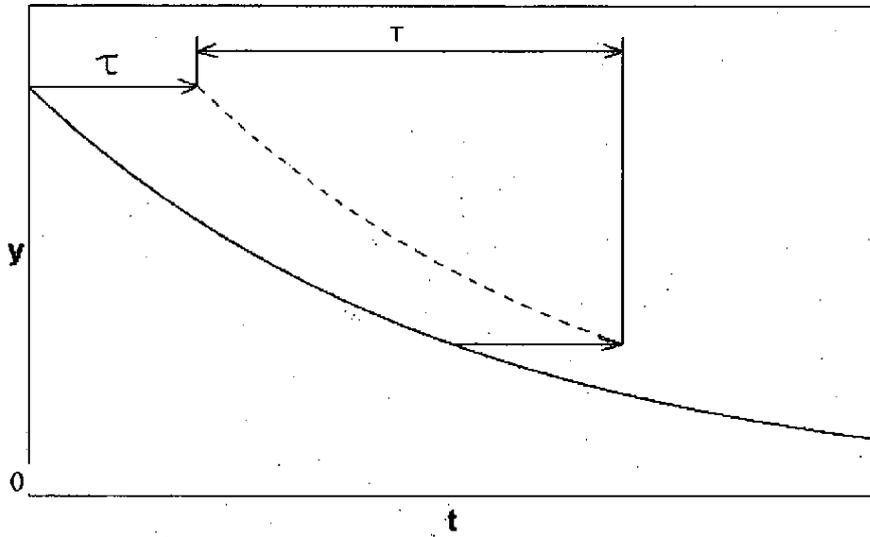


Fig. 13A

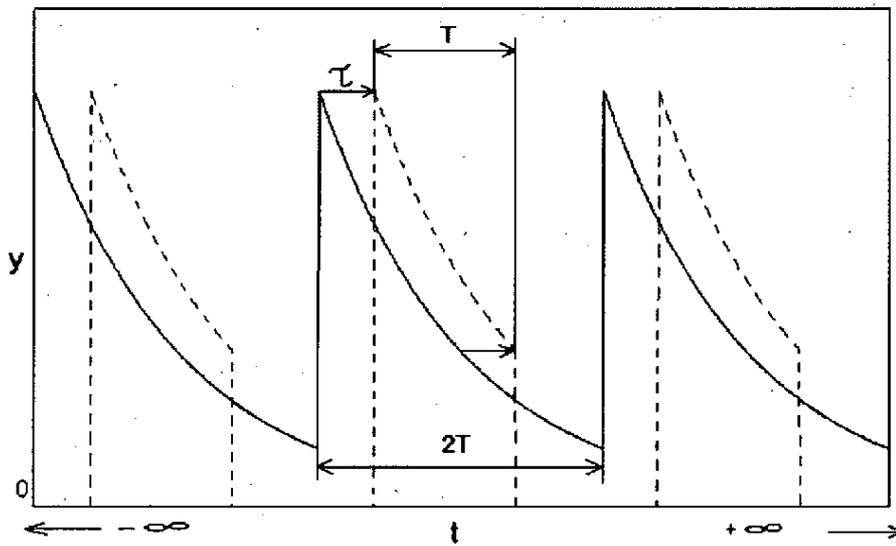


Fig. 13B

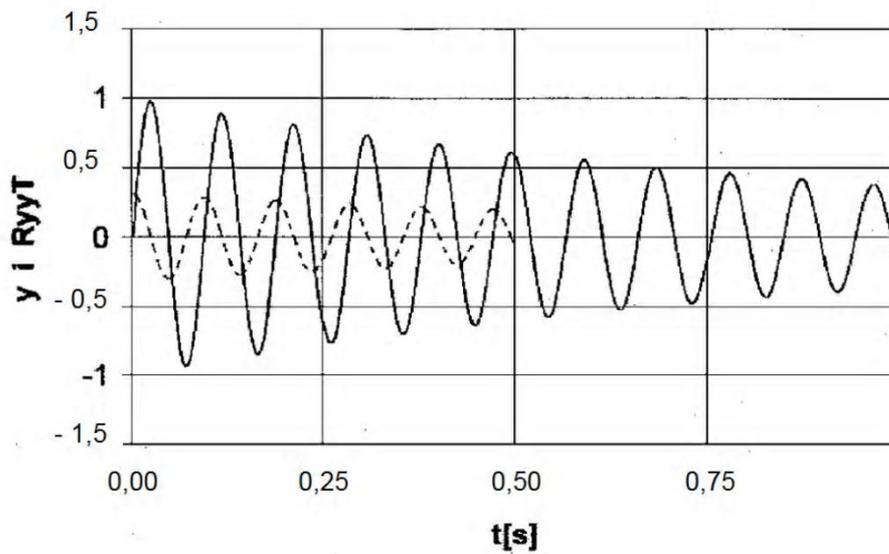


Fig. 14

$$R_{yy}(l) = \frac{1}{N/2} \sum_{n=1}^{N/2} y_n \cdot y_{n+l} \quad (12)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$                        $l = 0, 1, 2, \dots, N/2$

Fig. 15

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T y(t) \cdot y(t+\tau) \cdot dt \quad (13)$$

$y(t)$  es una señal real en el intervalo  $0 \leq t \leq T + \tau$   
 $0 \leq \tau < T$

Fig. 16

$$y(t) = A \exp(-\zeta \omega_0 t) \text{sen}(\omega_d t) \quad (14)$$

en la que

$A$  – Amplitud de vibraciones

$\zeta$  – Coeficiente de amortiguación viscosa

$\omega_0$  – Frecuencia de vibraciones naturales, de la configuración, sin amortiguación

$\omega_d$  – Frecuencia de vibraciones naturales, de la configuración, con amortiguación

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Fig. 17

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T A \exp(-\zeta \omega_0 t) \text{sen}(\omega_d t) \cdot A \exp(-\zeta \omega_0 (t + \tau)) \text{sen}(\omega_d (t + \tau)) dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \int_0^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) [\text{sen}^2(\omega_d t) \cos(\omega_d \tau) + \text{sen}(\omega_d t) \cos(\omega_d t) \text{sen}(\omega_d \tau)] dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) \int_0^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \text{sen}^2(\omega_d t) dt + \\ &+ \frac{A^2}{T} \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau) \int_0^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \text{sen}(\omega_d t) \cos(\omega_d t) dt = \\ &= C_1 \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) + C_2 \exp(-\zeta \omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau) \end{aligned}$$

en las que

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \text{sen}^2(\omega_d t) dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega_d t)) dt = \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_0^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) dt - \frac{A^2}{2T} \int_0^T \exp(-2\zeta \omega_0 t) \cos(2\omega_d t) dt = \\ &= C_{11} - C_{12} \end{aligned}$$

Fig. 18

$$C_{11} = \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\xi\omega_0 t) dt =$$

$$= A^2 \frac{1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)}{4\xi\omega_0 T}$$

para  $T = kT_{ob} = k \cdot 2\pi/2\omega_d$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  una integral

$$C_{12} = \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\xi\omega_0 t) \cos(2\omega_d t) dt =$$

$$= A^2 \frac{\xi\omega_0 [1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)]}{4T [\omega_d^2 + (\xi\omega_0)^2]}$$

para  $T = kT_{ob} = k \cdot 2\pi/2\omega_d$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  una integral

$$C_2 = \frac{A^2}{T} \int_{t=0}^T \exp(-2\xi\omega_0 t) \text{sen}(\omega_d t) \cos(\omega_d t) dt =$$

$$= \frac{A^2}{2T} \int_{t=0}^T \exp(-2\xi\omega_0 t) \text{sen}(2\omega_d t) dt =$$

$$= A^2 \frac{\omega_d (1 - \exp(-2\xi\omega_0 T))}{4T [\omega_d^2 + (\xi\omega_0)^2]}$$

Fig. 19

$$R_{pp,T}(\tau) = (C_{11} - C_{12}) \exp(-\xi\omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) + C_2 \exp(-\xi\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau) =$$

$$= \left\{ A^2 \frac{1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)}{4\xi\omega_0 T} - A^2 \frac{\xi\omega_0 [1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)]}{4T [\omega_d^2 + (\xi\omega_0)^2]} \right\} \exp(-\xi\omega_0 \tau) \cos(\omega_d \tau) +$$

$$+ A^2 \frac{\omega_d [1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)]}{4T [\omega_d^2 + (\xi\omega_0)^2]} \exp(-\xi\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau) =$$

$$= A^2 \frac{1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)}{4\xi\omega_0 T [\omega_d^2 + (\xi\omega_0)^2]} \exp(-\xi\omega_0 \tau) [\omega_d^2 \cos(\omega_d \tau) + \omega_d \xi\omega_0 \text{sen}(\omega_d \tau)] =$$

$$= A^2 \frac{\omega_d [1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)]}{4\xi\omega_0 T \sqrt{\omega_d^2 + (\xi\omega_0)^2}} \exp(-\xi\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau + \varphi) =$$

$$= A^2 \sqrt{1 - \xi^2} \frac{[1 - \exp(-2\xi\omega_0 T)]}{4\xi\omega_0 T} \exp(-\xi\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau + \varphi)$$

Fig. 20

$$R_{xT}(\tau) = C \exp(-\zeta\omega_0\tau) \text{sen}(\omega_d\tau + \varphi) \quad (15)$$

En la que la constante C se formula como

$$C = A^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4\zeta\omega_0 T}$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{\omega_d}{\sqrt{\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2}} \quad \text{cos } \varphi = \frac{\zeta\omega_0}{\sqrt{\omega_d^2 + (\zeta\omega_0)^2}}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\omega_d}{\zeta\omega_0} = \text{arctg} \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta\omega_0} = \text{arctg} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

Se deduce de la anterior ecuación que:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega_d}{\zeta\omega_0} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{cos } \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \text{cos}^2 \varphi}}{\text{cos } \varphi}$$

por lo tanto

$$\varphi = \arccos \zeta \quad (16)$$

Fig. 21

$$R_{yy,\infty}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t=0}^T y(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt \quad (17)$$

Fig. 22

$$R_{yy,\infty}(\tau) = A^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0 T)]}{4\zeta\omega_0} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau + \varphi)$$

por lo tanto

$$R_{yy,\infty}(\tau) = A^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{1}{4\zeta\omega_0} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau + \varphi)$$

por tanto

$$R_{yy,\infty}(\tau) = C_\infty \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau + \varphi)$$

en la que  $C_\infty = \text{const}$

Fig. 23

$$R_{yy,T-\tau}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_{t=0}^{T-\tau} y(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt \quad (18)$$

Fig. 24

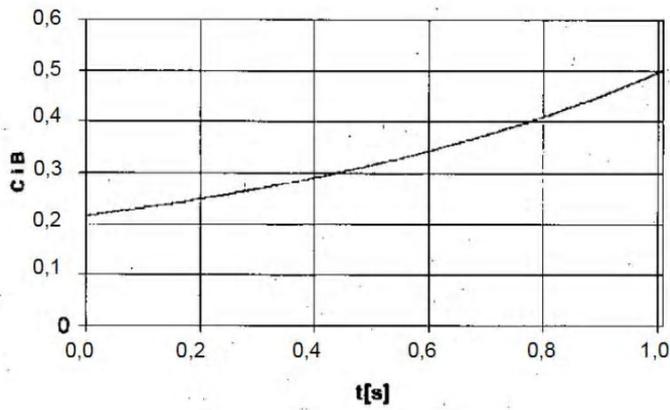
$$R_{yy,T-\tau}(\tau) = A^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0(T - \tau))]}{4\zeta\omega_0(T - \tau)} \exp(-\zeta\omega_0 \tau) \text{sen}(\omega_d \tau + \varphi)$$

En la que la fórmula

$$C_{T-\tau}(T - \tau) = A^2 \sqrt{1 - \zeta^2} \frac{[1 - \exp(-2\zeta\omega_0(T - \tau))]}{4\zeta\omega_0(T - \tau)}$$

no es una constante y depende del tiempo de desplazamiento  $\tau$ .

Fig. 25



En el que  $t$  es el tiempo de desplazamiento  $\tau$

$$C = C_{T-t}(T-t)$$

$$A = 1, \quad \xi = 0,015, \quad f_0 = 10,6 \text{ Hz.}$$

Fig. 26

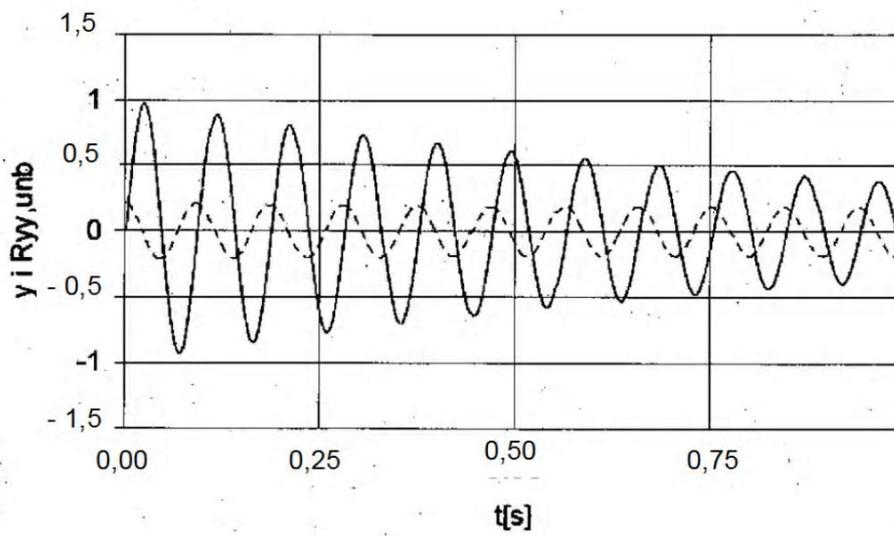


Fig. 27

$$\lambda = \zeta \omega_0 \quad \text{y} \quad \omega = \omega_d$$

$$C_{11} = A^2 \frac{1 - \exp(-2\lambda T)}{4\lambda T}$$

$$C_{12} = \frac{A^2}{4T\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} [\cos \varphi - \exp(-2\lambda T) \cos(\omega T + \varphi)]$$

En las que  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\lambda}$

$$C_2 = \frac{A^2}{4T\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} [\operatorname{sen} \varphi - \exp(-2\lambda T) \operatorname{sen}(\omega T + \varphi)]$$

Fig. 28

$$\begin{aligned} R_{y,T}(\tau) &= C_1 \exp(-\lambda\tau) \cos(\omega\tau) + C_2 \exp(-\lambda\tau) \operatorname{sen}(\omega\tau) = \\ &= (C_{11} - C_{12}) \exp(-\lambda\tau) \cos(\omega\tau) + C_2 \exp(-\lambda\tau) \operatorname{sen}(\omega\tau) = \\ &= \exp(-\lambda\tau) [(C_{11} - C_{12}) \cos(\omega\tau) + C_2 \operatorname{sen}(\omega\tau)] \end{aligned}$$

$$a \cos \alpha + b \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \alpha \right) = B \operatorname{sen}(\alpha + \varphi)$$

En las que  $\sqrt{a^2 + b^2} = B$        $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{sen} \varphi$        $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$        $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$

$$B = \sqrt{(C_{11} - C_{12})^2 + C_2^2}$$

Fig. 29

$$R_{y,\infty}(\tau) = \frac{A^2}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2} \exp(-\lambda\tau) \text{sen}(\omega\tau + \varphi)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\omega}{\lambda}$$

$$\frac{A^2}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}\right)^2} = A^2 \sqrt{1 - \xi^2} \frac{1}{4\lambda} = \text{const} \quad (19)$$

Fig. 30

$$\xi = \sqrt{\frac{\left(\ln \frac{A_n}{A_{n+1}}\right)^2}{(2\pi)^2 + \left(\ln \frac{A_n}{A_{n+1}}\right)^2}}$$

para  $\xi = 0,015$ , coeficiente  $\delta = \frac{A_n}{A_{n+1}} = 1,1$

Fig. 31

$$\bar{\xi}_n = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \bar{\xi}_{n-1} + \frac{\xi_n}{M}$$

- en la que
- $M$  sirve para fijar el grado de "olvido" de mediciones más antiguas
  - $\bar{\xi}_n$  es un promedio exponencial sobre  $n$  mediciones
  - $\xi_n$  es un resultado de la  $n$ -ésima medición

Fig. 32

$$R_{yy}(k) = \frac{1}{N/2} \sum_{n=1}^{N/2} y(n) \cdot y(n+k) \quad \text{en la que } k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (20)$$

en la que  $n = 1, 2, 3, \dots, N$   $N = 2^i$ , En la que  $i$  es un número natural

$$\begin{aligned} yp(n) &= y(n) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, N/2 \\ yp(n) &= 0 \quad \text{para } n = N/2 + 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$Y(j) = FFT[y(n)]$$

$$YP(j) = FFT[yp(n)]$$

$$Y_{YYP}(j) = Y(j) YP^*(j) \quad j = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$R_{yy}(k) = \frac{1}{N/2} FFT^{-1}[Y_{YYP}(j)] \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N/2 - 1$$

Fig. 33

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \exp(-j \frac{2\pi}{N} kn) \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$$

Fig. 34

```

1  FinBloque = 1
2  TamañoBloque = 2
3
4  Do While TamañoBloque <= NumMuestras
5      m = NumMuestras / TamañoBloque
6
7      I = 0
8      Do While I < NumMuestras
9          mb = 0
10         j = I
11         For n = 0 To FinBloque - 1
12             K = j + FinBloque
13             TR = cs (mb) * RealSalida (K) - sn (mb) * ImagSalida (K)
14             TI = sn (mb) * RealSalida (K) + cs (mb) * ImagSalida (K)
15             RealSalida (K) = RealSalida(j) - TR
16             ImagSalida (K) = ImagSalida(j) - TI
17             RealSalida (j) = RealSalida(j) + TR
18             ImagSalida (j) = ImagSalida(j) + TI
19             mb = mb + m
20             j = j + 1
21         Next
22
23         I = I + TamañoBloque
24     Loop
25
26     FinBloque = TamañoBloque
27     TamañoBloque = TamañoBloque * 2
28 Loop

```

en el que

NumMuestras -  
TamañoBloque -

m -

mb -

sn(mb) - valor de la función sen(mb) extraído de tabla previamente calculada

cs(mb) - valor de la función cos(mb) extraído de tabla previamente calculada

Fig. 35

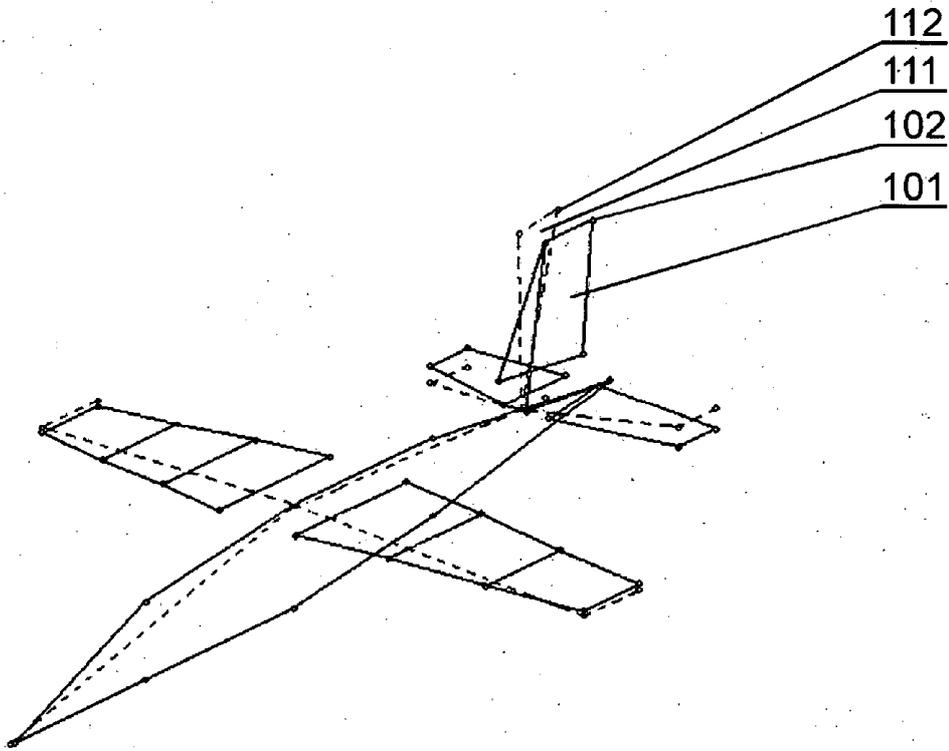


Fig. 36

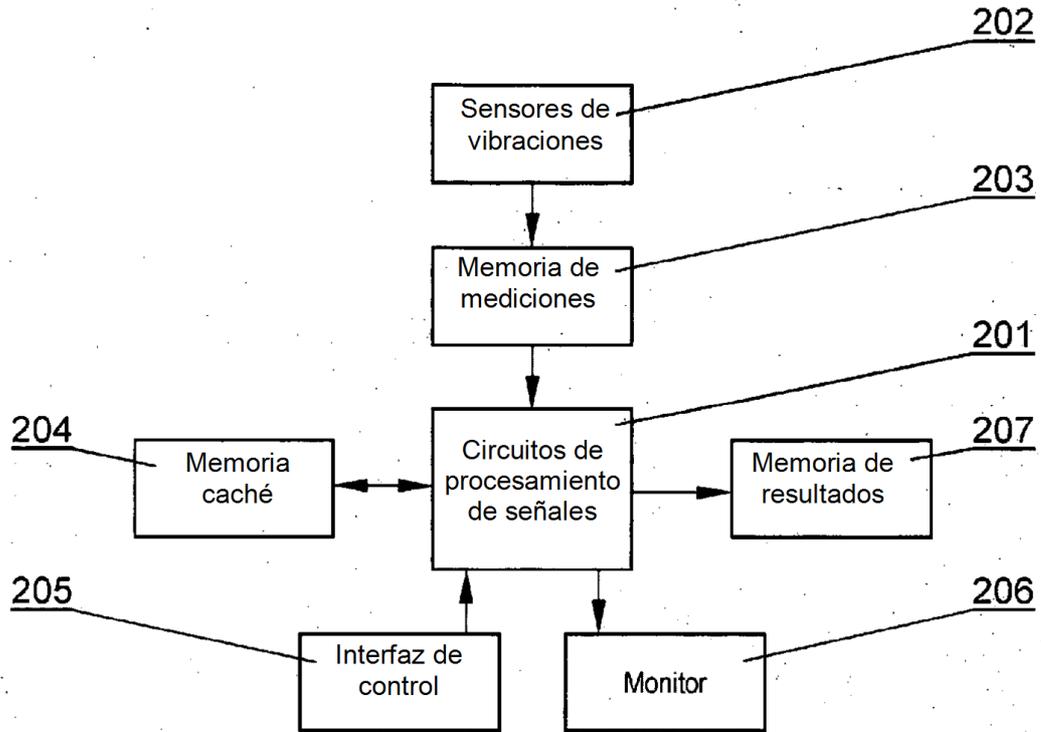


Fig. 37