

19



OFICINA ESPAÑOLA DE
PATENTES Y MARCAS

ESPAÑA



11 Número de publicación: **2 651 093**

51 Int. Cl.:

G06T 11/00 (2006.01)

12

TRADUCCIÓN DE PATENTE EUROPEA

T3

86 Fecha de presentación y número de la solicitud internacional: **13.07.2011 PCT/EP2011/003507**

87 Fecha y número de publicación internacional: **17.01.2013 WO13007272**

96 Fecha de presentación y número de la solicitud europea: **13.07.2011 E 11737897 (6)**

97 Fecha y número de publicación de la concesión europea: **06.09.2017 EP 2732437**

54 Título: **Reconstrucción de imágenes de transmisión y obtención de imágenes utilizando datos de detector de Poisson**

45 Fecha de publicación y mención en BOPI de la traducción de la patente:
24.01.2018

73 Titular/es:
**SCIVIS WISSENSCHAFTLICHE
BILDVERARBEITUNG GMBH (100.0%)
Bertha-von-Suttner-Strasse 5
37085 Göttingen, DE**

72 Inventor/es:
**ASPELMEIER, TIMO;
EBEL, GEMOT y
ENGELAND, UWE**

74 Agente/Representante:
CURELL AGUILÁ, Mireia

ES 2 651 093 T3

Aviso: En el plazo de nueve meses a contar desde la fecha de publicación en el Boletín Europeo de Patentes, de la mención de concesión de la patente europea, cualquier persona podrá oponerse ante la Oficina Europea de Patentes a la patente concedida. La oposición deberá formularse por escrito y estar motivada; sólo se considerará como formulada una vez que se haya realizado el pago de la tasa de oposición (art. 99.1 del Convenio sobre Concesión de Patentes Europeas).

DESCRIPCIÓN

Reconstrucción de imágenes de transmisión y obtención de imágenes utilizando datos de detector de Poisson.

5 **Campo de la invención**

La invención se refiere a un método de reconstrucción de imágenes para reconstruir una imagen de un objeto basándose en datos de detector contaminados con ruido de Poisson, especialmente datos de detector recogidos con un dispositivo de transmisión de rayos X, como un dispositivo de obtención de imágenes de tomografía computarizada (TC) o un dispositivo de obtención de imágenes por rayos X plana, que funciona, por ejemplo, en condiciones de flujo de fotones bajo. En particular, el método de reconstrucción de imágenes se basa en una reconstrucción de imágenes no analítica utilizando un algoritmo de minimización. Además, la invención se refiere a un método de obtención de imágenes que incluye el método de reconstrucción de imágenes. Además, la invención se refiere a un dispositivo de obtención de imágenes que implementa la obtención de imágenes y el método de reconstrucción de imágenes.

Antecedentes de la invención

En la presente memoria descriptiva, se hace referencia a las publicaciones siguientes que ilustran la técnica anterior de técnicas de reconstrucción de imágenes y obtención de imágenes convencionales.

- [1] David Donoho. For most large underdetermined systems of linear equations, the minimal l^1 norm near-solution approximates the sparsest near-solution. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(7):907 - 934, 2006;
- [2] Jarvis Haupt and Robert Nowak. Signal reconstruction from noisy random projections. *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(9):4036 - 4048, 2006;
- [3] Maxim Raginsky, Rebecca M. Willett, Zachary T. Harmany, and Roummel F. Marcia. Compressed sensing performance bounds under poisson noise. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 58(8):3990-4002, 2010;
- [4] Emmanuel Candès and Justin Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 23(3):969 - 985, 2007;
- [5] C. C. Craig. On the Tchebychef inequality of Bernstein. *Ann. Math. Statist.*, 4(2):94-102, 1933;
- [6] J. M. Noras. Some formulas for moments of the Poisson distribution. *Phys. Rev. B*, 22(12):6474-6475, 1980;
- [7] Emmanuel J. Candès *et al.* "An Introduction To Compressive Sampling" en "IEEE Signal Processing Magazine" marzo de 2008, págs. 21 - 30; y
- [8] Rebecca M. Willett *et al.* "Performance bounds on compressed sensing with Poisson noise" en "IEEE International Symposium on Information Theory ISIT" 2009, 28 de junio de 2009 – 3 de julio de 2009, págs.174 - 178;
- [9] Documento PCT/EP2010/000526 (no publicado en la fecha de prioridad de la presente memoria descriptiva);
- [10] Documento WO 2010/121043 A2;
- [11] D. J. Lingenfelter *et al.* "Sparsity Regularization for Image Reconstruction with Poisson Data" en "Proceedings of SPIE", volumen 7246, 2009, pág. 72460F-1; y
- [12] J.-L. Starck *et al.* "An Overview of Inverse Problem Regularization Using Sparsity" en "Image Processing (ICIP)", 2009, Conferencia internacional IEEE 16ª sobre Procesamiento de imágenes, 2009, págs. 1453-1456.

La reconstrucción de una imagen de TC tridimensional se realiza a menudo mediante el conocido algoritmo de retroproyección filtrada (FBP), que es adecuado para obtención de imágenes por TC convencional. Sin embargo, este algoritmo tiene algunas desventajas. En primer lugar, requiere una medición ideal, es decir, los ángulos a los que se observa al paciente deben ser muchos, y deben ser equidistantes. En segundo lugar, la FBP no funciona fácilmente con ruido. Lo último significa que la adquisición de imágenes debe hacerse de tal manera que se minimice el ruido, lo que requiere una dosis alta. Una alternativa a la FBP es reconstruir la imagen de manera repetitiva utilizando técnicas habituales tales como maximización de expectativa de máxima verosimilitud

(MLEM). Este método tiene la ventaja de que el establecimiento de obtención de imágenes es, en principio, relativamente arbitrario: por ejemplo, los ángulos no tienen que ser equidistantes (aunque a menudo lo son). Además, la naturaleza de Poisson de las mediciones con ruido está incorporada en el método. Este tipo de algoritmo va haciéndose más y más factible con la cantidad de potencia de ordenador disponible actualmente. Sin embargo, aún es necesario grabar mucha información para obtener finalmente una buena reconstrucción.

Por el contrario, el concepto de detección de compresión (CS) garantiza, en principio, que una buena reconstrucción puede obtenerse de manera similar con significativamente menos información grabada. Esto se basa en la idea de que la mayoría, si no todos, los objetos del mundo real pueden “comprimirse” si se representan en un sistema de base adecuado. Que puede comprimirse significa que los coeficientes de la representación, al ordenarlos por tamaño, disminuyen rápido con algo de potencia de su índice. La información de que un objeto puede comprimirse puede utilizarse además de los relativamente pocos puntos de datos grabados para obtener una reconstrucción fiable. En más detalle, la detección de comprimidos (o: detección de compresión, muestreo de compresión y muestreo de dispersión) es una técnica para adquirir y reconstruir una señal que utiliza el conocimiento previo de que está dispersa o que puede comprimirse. Una introducción a la CS se ha presentado por Emmanuel J. Candès *et al.* [7]. La teoría de CS muestra que las señales dispersas, que contienen mucha menos información de la que puede codificarse de manera máxima con el mismo número de entradas de datos, pueden reconstruirse de manera exacta a partir de muy pocas mediciones en condiciones libres de ruido.

Según Jarvis Haupt *et al.* [2], un conjunto de datos f_j^* de tamaño v ($j = 1, \dots, v$) que está disperso (o más bien “que puede comprimirse”) puede construirse de manera precisa a partir de un pequeño número k de proyecciones aleatorias aunque las proyecciones estén contaminadas por ruido de varianza constante, por ejemplo, ruido

gaussiano. Específicamente, $y_i = \sum_j \varphi_{ij} f_j^* + \xi_i$ con $i = 1, \dots, k$, son las proyecciones con ruido de f_j^* ,

tomadas con la matriz de proyecciones φ_{ij} que consiste en entradas aleatorias, todas extraídas de la misma distribución de probabilidad con promedio cero y varianza $1/v$ (de manera que los valores transformados y_i presentan el mismo orden de magnitud que los originales) y el ruido ξ_i se extrae de una distribución de probabilidad gaussiana con promedio cero y varianza σ^2 . Al obtener la expresión de minimización \hat{f}_j de una expresión de función determinada (que va a mostrarse en detalle a continuación), se obtiene una aproximación a f_j^* para la que el error promedio está limitado por una constante de tiempo $(k/\log v)^{-\alpha}$ con $0 < \alpha \leq 1$, es decir, el error producido depende logarítmicamente sólo de v . Dicho de otro modo, el error puede hacerse pequeño eligiendo un $k/\log v$ grande, pero no es necesario presentar un k/v cercano a 1. Una reconstrucción precisa es posible aunque el número de proyecciones sea mucho más pequeño que v , siempre que $k/\log v$ sea grande.

Un punto crucial en la derivación de los resultados anteriores es el hecho de que la varianza del ruido ξ_i es una constante. A pesar de que puede obtenerse un resultado similar para ruidos no gaussianos (pueden demostrarse determinadas propiedades de ruido proporcionadas requeridas para la validez de la desigualdad de Craig-Bernstein), el resultado no se traslada fácilmente al caso en el que la varianza del ruido depende de los valores de f_j^* . Aunque esto es precisamente lo que sucede, por ejemplo, en sistemas de obtención de imágenes de fotones limitados en los que una fuente de ruido principal es la naturaleza cuántica discreta de los fotones. En

este caso las proyecciones y_i presentan estadísticas de Poisson con el parámetro $\mu_i = \sum_j \varphi_{ij} f_j^*$. Este parámetro es igual al promedio de y_i pero también a su varianza.

En el pasado, se sometió a prueba si el principio de reconstrucciones precisas a partir de pocas proyecciones se traslada al ruido de Poisson con el fin de hacer reconstrucciones precisas posibles con menos mediciones, por ejemplo, en tomografía de emisión. Se esperaba que la estrategia de detección de compresión para la reconstrucción de objetos dispersos o que pueden comprimirse a partir de pocas mediciones fuese difícil de aplicar a datos corruptos con ruido de Poisson, debido a las propiedades específicas de estadísticas de Poisson y al hecho de que habitualmente las mediciones no pueden hacerse de manera aleatoria, como en muchos otros casos.

Rebecca M. Willett *et al.* [8] ha generalizado los resultados a partir de Jarvis Haupt *et al.* para el ruido de Poisson. Se propuso para reconstruir una imagen tomográfica a partir de los datos de detector utilizando un procedimiento de minimización de una expresión de función \hat{f} dependiendo de una matriz de detección A y los datos de detector y dependiendo además de un término de penalización, en el que la matriz de detección A se construye basándose en variables estadísticas de Rademacher y el término de penalización depende de la dispersión del objeto. Sin embargo, el resultado fue desalentador: se halló que el límite superior sobre el error *aumenta* con el número de mediciones, es decir, parece que más mediciones hacen la precisión más pequeña. Por tanto, se supuso que la detección de compresión habitualmente sólo funciona con tipos de ruido que presentan una varianza fijada.

Se propone un método de reconstrucción de imágenes en [9] para reconstruir una imagen tomográfica de emisión de una región de examen dentro de un objeto a partir de los datos de detector que comprenden valores aleatorios de Poisson medidos en una pluralidad de posiciones diferentes en relación con el objeto. Las posiciones son las ubicaciones espaciales de medición de los datos de detector, por ejemplo, la posición de un elemento de detector (píxel) de un dispositivo detector de SPECT en el momento de recoger datos con este dispositivo detector en su posición angular actual con respecto al objeto y en su distancia desde el centro de rotación, o como ejemplo adicional, las ubicaciones espaciales de elementos de detector que detectan datos en las líneas de respuesta (LOR's) de eventos de coincidencia medidos con un dispositivo detector de PET. Según [9], se proporciona una matriz de sistema predeterminada que asigna los vóxeles del objeto a los datos de detector. Además, la imagen tomográfica se reconstruye minimizando una expresión de función dependiendo de los datos de detector y la matriz de sistema e incluyendo adicionalmente una representación de dispersión o compresión del objeto en una base ortogonal. La base ortogonal es una matriz ortogonal, las columnas de la cual son vectores de base ortonormal. La base ortogonal se selecciona de manera que el objeto, en particular, la región de examen, puede representarse en la base ortogonal cumpliendo los requisitos de dispersión o compresibilidad. Al contrario del enfoque anterior de Rebecca M. Willett *et al.* [8] que utiliza una matriz de detección aleatoria, los elementos de la matriz de sistema son valores no estadísticos, sino más bien seleccionados asignando geométrica o físicamente contribuciones de cada uno de los vóxeles (datos de objeto) a cada elemento de detector de un dispositivo detector o los datos de detector asociados, respectivamente. La matriz de sistema que define los datos de detector como combinaciones lineales de los datos de objeto originales se determina mediante características geométricas o físicas del dispositivo de obtención de imágenes, en particular, mediante la disposición del objeto en relación con el dispositivo detector y la geometría del dispositivo detector.

La referencia [10] da a conocer un método para la reconstrucción de imagen tomográfica utilizando datos de proyección truncados que permiten la reconstrucción interior exacta de una región de interés (tomografía computarizada interior). Se utilizan modelos de dispersión en [10], que se basan en una minimización de varianza total. Antecedentes matemáticos adicionales con respecto a la regularización de dispersión en la reconstrucción de imágenes puede encontrarse en las referencias [11] y [12]. Sin embargo, estas referencias no mencionan nada con respecto a la reconstrucción de imágenes de datos de detector de medición de transmisión de rayos X que comprenden valores aleatorios de Poisson.

Objetivo de la invención

El objetivo de la invención es proporcionar un método de reconstrucción de imágenes mejorado para reconstruir una imagen de un objeto, en particular, con fines de tomografía de transmisión, que es capaz de evitar las desventajas de técnicas convencionales. En particular, el objetivo es proporcionar un método de reconstrucción de imágenes que permite reconstruir la imagen de transmisión con una cantidad reducida de datos de detector (tal como por ejemplo menos ángulos para TC o sobremuestreo para imágenes de rayos X plano) sin una pérdida en calidad de imagen. Además, el objetivo de la invención es proporcionar un método de obtención de imágenes mejorado que evita las desventajas de técnicas de obtención de imágenes convencionales. Además, el objetivo de la invención es proporcionar un dispositivo de obtención de imágenes mejorado, en particular, que está adaptado para llevar a cabo el método de obtención de imágenes inventivo.

Sumario de la invención

Los objetivos anteriores se resuelven mediante un método de reconstrucción de imágenes, un método de obtención de imágenes y/o un dispositivo de obtención de imágenes que comprende las características de las reivindicaciones independientes. Realizaciones ventajosas de la invención se definen en las reivindicaciones dependientes.

Según un primer aspecto de la invención, se propone un método de reconstrucción de imágenes para reconstruir una imagen f^{min} que representa una región de examen dentro de un objeto. En primer lugar, se proporcionan datos de detector (y_i) que comprenden valores aleatorios de Poisson a partir de una medición de transmisión de rayos X que utiliza una fuente de rayos X y un dispositivo detector, siendo dichos datos de detector (y_i) medidos en una i -ésima posición de entre una pluralidad de posiciones de píxel diferentes del dispositivo detector en relación con el objeto. Posteriormente, la imagen f^{min} se reconstruye basándose en los datos de detector (y_i) utilizando un procedimiento de minimización de la expresión de función $F(f)$

$$F(\underline{f}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i) + a |T^{-1} \underline{f}|_p$$

en el que

f es una imagen de prueba actual usada para minimizar la expresión de función $F(\underline{f})$,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i)$$

es una expresión de función de riesgo de máxima verosimilitud para las estadísticas de Poisson, siendo dichos parámetros μ_i proyecciones de transmisión de la imagen de prueba \underline{f} , calculándose dichas proyecciones según La ley de Beer-Lambert en la i -ésima posición de píxel en relación con la fuente de rayos X,

$|T^{-1}\underline{f}|_p$ es una expresión de función de aplicación de dispersión que incluye la norma l_p de vector $T^{-1}\underline{f}$ con $0 \leq p < 2$, siendo dicho vector $T^{-1}\underline{f}$ una representación de dispersión o compresión de \underline{f} en una base (bi-)ortogonal T , y

a es un factor de calibración. La imagen \underline{f}^{min} que va a reconstruirse es el mínimo global de la expresión de función $F(\underline{f})$.

Los inventores han hallado que para la reconstrucción de imágenes de transmisión de rayos X, la expresión de función que va a minimizarse para obtener la imagen reconstruida, se define dependiendo de la ley de Beer-Lambert (o: ley de Beer). La ley de Beer-Lambert establece que la atenuación total es igual a la exponencial de la integral negativa de los coeficientes de atenuación locales sobre la trayectoria de radiación a través del objeto. Por consiguiente, existe una dependencia logarítmica entre la transmisión de radiación a través del objeto y el producto del coeficiente de atenuación local del objeto y la distancia que recorre la radiación a través de un elemento de volumen, sumado a los elementos de volumen a lo largo de la trayectoria.

Los inventores han mostrado que la reconstrucción de imágenes funciona con ruido de Poisson, que no presenta una varianza fijada (la varianza de una variable de Poisson x con valor promedio $Ex = \lambda$ es igual a $E(x^2) - E^2(x) = \lambda$ y, por tanto, dependiente de señal). Por tanto, la invención permite reducir el número de ángulos y dosis utilizando la naturaleza de compresión del objeto (el paciente) y modelando e incorporando la naturaleza con ruido de las mediciones, dando como resultado una reconstrucción precisa con una alta relación señal/ruido.

Opcionalmente, la expresión de función $F(\underline{f})$ puede incluir adicionalmente una función de regularización aditiva

$$R(\underline{D}): F(\underline{f}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i) + a |T^{-1}\underline{f}|_p + R(\underline{f})$$

. Como ventaja, la función de regularización R puede pretenderse para la supresión de artefactos en la tomográfica de imágenes reconstruidas.

Como ventaja principal, la invención proporciona un nuevo método para reconstruir de manera precisa una imagen bidimensional o tridimensional a partir de muy pocos datos de detector, por ejemplo, proyecciones, mediante métodos algebraicos o no analíticos utilizando un algoritmo de minimización. Los inventores han hallado métodos de aprovechar el hecho de que los objetos del mundo real son habitualmente dispersos o por lo menos pueden comprimirse al tiempo que superan las restricciones de enfoques convencionales para aplicar una CS sobre datos de ruido de Poisson. Pueden reconstruirse imágenes de transmisión de rayos X con un número de mediciones que es reducido en comparación con mediciones convencionales, mientras puede obtenerse la misma precisión que con métodos convencionales. Por consiguiente, el tiempo de medición y/o actividad aplicada (para la tomografía de emisión) o dosis de irradiación (para tomografía de transmisión), por tanto, puede reducirse.

Para reconstrucciones convencionales existen (por lo menos) tres problemas. En primer lugar, los datos tienen ruido, en segundo lugar, es necesario realizar un número grande de mediciones con el fin de obtener información suficiente para una calidad de reconstrucción aceptable, y en tercer lugar, el problema de reconstrucción está mal planteado, de manera que sin medidas adicionales incluso una cantidad infinitesimal de ruido genera artefactos importantes. La invención es capaz de superar las tres dificultades proporcionando un enlace entre una estrategia de detección de compresión (resolviendo el problema dos) y una aproximación de máxima verosimilitud (que se encarga de manera óptima del problema uno) para el caso de ruido de Poisson, mientras que se permite aún la inclusión de técnicas de regularización que abordan el problema tres.

Según la invención, la imagen \underline{f}^{min} se reconstruye minimizando la expresión de función que incluye en particular una representación de dispersión o compresión del objeto en una base (bi-)ortogonal T . La base (bi-)ortogonal (o simplemente base a continuación) T es una matriz (bi-)ortogonal, las columnas de la cual son vectores de base. La base se selecciona de manera que el objeto, en particular, la región de examen, puede representarse en la base cumpliendo los requisitos de dispersión o compresibilidad.

El procedimiento de minimización es un procedimiento algebraico o no analítico, por ejemplo, un algoritmo iterativo. La imagen reconstruida \underline{f}^{min} comprende los datos de imagen que representan el mínimo global de la

expresión de función $F(\underline{f})$. En particular, la reconstrucción inventiva comprende minimizar la expresión de función anterior $F(\underline{f})$, que incluye dos u opcionalmente tres partes aditivas, concretamente una parte de riesgo empírica, que representa la estadística de Poisson de la medición, una parte de CS que representa la compresibilidad del objeto y (opcionalmente) un término de regularización.

5

El factor de calibración a es un parámetro fijado predeterminado, que no se cambia durante el procedimiento de minimización, es decir, no es un parámetro de ajuste. Características adicionales del factor de calibración a se describen a continuación. Mediante una determinación preliminar del factor de calibración a , puede mejorarse la reconstrucción de imágenes. Esta es una diferencia adicional en comparación con el enfoque convencional anterior de Rebecca M. Willett *et al.*

10

Según una alternativa de la invención (realización de TC), la medición de transmisión de rayos X es una obtención de imágenes de TC de rayos X del objeto y la imagen (f_j^{min}) es una reconstrucción del objeto volumétrico (secciones bidimensionales o un volumen tridimensional). Al utilizar la ley de Beer-Lambert, los parámetros μ_i son

15

$$\mu_i = \sum_{i'} B'_{ii'} I_0 \exp\left(-\sum_j A_{i'j} f_j\right) + r$$

20

en los que $B'_{ii'}$ es una matriz que representa una función de respuesta del dispositivo detector que asigna una posición espacial i' -ésima sobre la superficie de detector a los datos de detector (yi) i -ésimos,

I_0 es una intensidad del haz de rayos X sin atenuar,

25

$A_{i'j}$ es una matriz de sistema predeterminada que asigna un vóxel j -ésimo del objeto (1) a la posición espacial i' -ésima sobre la superficie de detector, y

r es un parámetro de recuento de fondo del dispositivo detector.

30

Con la realización de TC, se proporciona la matriz de sistema predeterminada A_{ij} que asigna un vóxel j -ésimo del objeto a los datos de detector i' -ésimos. Por el contrario al enfoque convencional anterior de Rebecca M. Willett *et al.* que utiliza una matriz de detección aleatoria, elementos de la matriz de sistema A_{ij} son valores no estadísticos sino más bien seleccionados asignando geométrica o físicamente contribuciones de cada uno de los vóxeles (datos de objeto) a cada elemento de detector de un dispositivo detector o los datos de detector asociados, respectivamente. Se determina la matriz de sistema que define los datos de detector como combinaciones lineales de los datos de objeto originales mediante características geométricas o físicas del dispositivo de obtención de imágenes, en particular, mediante la disposición del objeto en relación con el dispositivo detector y la geometría del dispositivo detector. Además, pueden codificarse influencias tales como tamaño de punto focal, efecto de talón o dispersión por cuerpo en la matriz de sistema.

35

40

La base T se selecciona para que sea tan incoherente como sea posible con respecto a la matriz de sistema A_{ij} y de manera que el objeto \underline{f} (o un objeto típico comparable) presenta una representación que puede comprimirse en esta base. Estos criterios se introdujeron previamente, por ejemplo, por J. Candès *et al.* (véase lo anterior). Una ventaja particular de esta realización, que se explica con detalles adicionales a continuación, puede obtenerse mediante la aplicación de la norma l_p con $0 \leq p < 2$, por ejemplo, $p = 1$. En el caso de $p \geq 1$, el procedimiento de minimización presenta un único mínimo global que permite una implementación con una velocidad de procesamiento aumentada.

45

50

Según una segunda alternativa de la invención (realización de obtención de imágenes plana), la medición de transmisión de rayos X es una obtención de imágenes por rayos X plana del objeto y la imagen ($f_{i'}^{min}$) es una reconstrucción plana de una imagen de atenuación de rayos X del objeto. Al utilizar la ley de Beer-Lambert, se proporciona la imagen de prueba $f_{i'}$ en términos de un objeto de prueba tridimensional f_j^A como

$$f_{i'} = I_0 \exp\left(-\sum_j A_{i'j} f_j^A\right),$$

55

$A_{i'j}$ es una matriz de sistema predeterminada que asigna un vóxel j -ésimo del objeto de prueba a la posición espacial i' -ésima sobre la superficie de detector, y

- los parámetros μ_i son

$$\mu_i = \sum_{i'} B'_{ii'} f_{i'} + r,$$

en los que

5 $B'_{ii'}$ es una matriz que representa una función de respuesta del dispositivo detector que asigna una posición espacial i' -ésima sobre la superficie de detector a los datos de detector (y_i) i -ésimos, y

r es un parámetro de recuento de fondo del dispositivo detector.

10 Una ventaja adicional de la invención se proporciona por el hecho de que están posibles diversos enfoques para determinar (ajustar) la matriz de sistema A_{ij} y/o la función de respuesta $B'_{ii'}$. Como primera variante, puede ajustarse la matriz de sistema y/o la función de respuesta utilizando datos de referencia del sistema de medición utilizado para recoger los datos de detector. Los datos de referencia pueden almacenarse como datos específicos del sistema de medición en el dispositivo de reconstrucción de imágenes, por ejemplo, en el
15 dispositivo de obtención de imágenes. Según una segunda variante, las entradas de la matriz de sistema y/o de la función de respuesta pueden adquirirse utilizando una medida de calibración. En este caso, se realiza la recogida de los datos de detector con un objeto de calibración (objeto de prueba) que presenta datos de objeto de transmisión planos o volumétricos conocidos. Los datos de detector de calibración pueden utilizarse para ajustar los elementos de la matriz de sistema y/o de la función de respuesta.

20 Otra ventaja de la invención se proporciona por el hecho de que son posibles diversas bases T . Tal como se conoce a partir de la teoría de ondículas tridimensionales (véase A. Cohen *et al.* en "American Journal of Mathematics", Volumen 121, 1999, págs. 587 - 628, y P. Bechler *et al.* en "Transactions of American Mathematical Society", Volumen 359 (2), 2007, págs. 619 - 635), objetos con la denominada varianza limitada
25 presentan coeficientes de ondícula que pueden comprimirse. Esta condición se cumple completamente para los objetos del mundo real, de manera que una base ortogonal adecuada que utiliza ondículas tridimensionales con un soporte finito pueden encontrarse para cualquier objeto que va a examinarse. Por tanto, según una realización preferida de la invención, T es una base de ondículas tridimensionales con un portador compacto. Alternativamente, si está disponible un conocimiento anterior determinado sobre el objeto o la estructura del mismo, una base adaptada puede producirse con entradas dependiendo de datos de objeto típicos del objeto del que van a obtenerse imágenes. En este caso, la base ortogonal puede hacerse coincidir con el tipo de objeto para mejorar la reconstrucción de imágenes. Como ejemplo, si se conoce que el objeto es suficientemente suave, presentarán predominantemente componentes de baja frecuencia espacial de manera que es adecuada una base de Fourier. Alternativamente, se podría elegir una base de polinomios de Chebyshev en el plano
30 combinado con una base de Fourier unidimensional en la dirección axial. Para los objetos del mundo real, un análisis de componentes principales de un número de objetos de referencia puede generar una base adecuada.

El método de reconstrucción de imágenes puede llevarse a cabo inmediatamente después de recoger los datos de detector, en particular con el dispositivo de obtención de imágenes que recoge los datos de detector.
40 Alternativamente, el método de reconstrucción de imágenes puede llevarse a cabo con un dispositivo de reconstrucción de imágenes en una ubicación distante y/o con un retardo después de la medida con datos de detector proporcionados por ejemplo por medio de un canal de comunicación de datos desde el dispositivo de obtención de imágenes hasta el dispositivo de reconstrucción de imágenes o desde un almacenamiento de datos. Por consiguiente, los datos de detector pueden proporcionarse por ejemplo por medio de una red de
45 datos, desde un almacenamiento de datos o directamente por el dispositivo detector.

Características importantes adicionales de la invención pueden representarse mediante etapas adicionales llevadas a cabo después de la reconstrucción de imágenes, como por ejemplo almacenar, grabar, visualizar y/o procesamiento de imágenes adicional de la imagen reconstruida.
50

Según un segundo aspecto de la invención, se propone un método de obtención de imágenes para reconstruir una imagen de una región de examen dentro de un objeto, que comprende las etapas de recoger los datos de detector con el dispositivo detector de un dispositivo de obtención de imágenes y someter los datos de detector al método de reconstrucción de imágenes inventivo según el primer aspecto anterior de la invención.
55 Preferiblemente, el método de obtención de imágenes está adaptado para recoger una imagen de TC o una imagen de transmisión plana.

Según una realización particularmente preferida de la invención adicional, puede proporcionarse una etapa de preparación antes de la recogida de los datos de detector de TC. La etapa de preparación comprende un establecimiento de una medida de calidad de imagen (riesgo) que va a realizarse mediante el método de obtención de imágenes. Dependiendo del riesgo, la dosis y el número de posiciones angulares se seleccionan a qué datos de detector se recogen. Por consiguiente, para obtener una imagen preliminar en la que una baja calidad de imagen es suficiente, se utiliza un número reducido de posiciones angulares, mientras que para una
60

obtención de imágenes regular posterior con calidad de imagen mejorada, se aumenta la dosis y/o el número de posiciones angulares (y de manera correspondiente los datos de detector).

5 Según un tercer aspecto de la invención, se propone un dispositivo de obtención de imágenes para obtener imágenes de una región de examen en un objeto, que comprende una fuente de rayos X, un dispositivo detector para medir datos de detector que comprenden valores aleatorios de Poisson medidos en la posición angular i -ésima de un elemento de detector del dispositivo detector en relación con el objeto, y un dispositivo de reconstrucción para reconstruir una imagen el objeto, en el que los datos de detector se someten al método de reconstrucción de imágenes según el primer aspecto anterior de la invención.

10 Objetos independientes adicionales de la invención son un programa informático que reside en un medio legible por ordenador, con un código de programa para llevar a cabo el método de reconstrucción de imágenes según el primer aspecto anterior de la invención, y un aparato que comprende un medio de almacenamiento legible por ordenador que contiene instrucciones de programa para llevar a cabo el método de reconstrucción de imágenes según el primer aspecto anterior de la invención.

15 Ventajas adicionales de la invención pueden resumirse tal como sigue. En primer lugar, la cantidad de medidas para obtener una calidad de imagen determinada puede reducirse en comparación con la técnica de obtención de imágenes convencional que da lugar a la misma calidad de imagen. La medición de tiempo y la molestia para el paciente, por consiguiente, puede reducirse. En particular, pueden evitarse artefactos que resultan de movimientos no intencionados del objeto, por ejemplo del paciente. En segundo lugar, el método de reconstrucción de imágenes no incluye un parámetro libre. En particular, si está disponible información suficiente para la compresibilidad de los datos de objeto, la imagen de transmisión de rayos X puede obtenerse exclusivamente basándose en los datos de detector y la matriz de sistema determinada por la medición de disposición. En tercer lugar, puede controlarse el riesgo de reconstrucción (obsérvese a continuación). La calidad de una reconstrucción puede evaluarse cuantitativamente. El método de reconstrucción de imágenes considera estadísticas de Poisson no sólo en la evaluación del riesgo, sino más bien también con la reconstrucción como tal, es decir, las ventajas de la reconstrucción de máxima verosimilitud están asociadas con la ventaja de un número reducido de medidas debido a la aplicación de la técnica de CS. En cuarto lugar, en lugar de sólo reducir el número de medidas, puede elegirse una combinación apropiada de medidas reducidas y dosis reducidas que mantiene el mismo riesgo. Finalmente, el método inventivo puede extenderse en analogía al método de verosimilitud penalizada para una regularización del objeto reconstruido.

20 La invención proporciona ventajas particulares adicionales para el método de obtención de imágenes, en particular para seleccionar o establecer las posiciones angulares en la que se recogen los datos de detector. Según una realización preferida de la invención, puede proporcionarse un establecimiento aleatorizado de las posiciones angulares. Según una realización alternativa adicional de la invención, pueden recogerse de manera continua los datos de detector, por ejemplo con un dispositivo de TC mientras que las posiciones angulares del dispositivo detector del mismo se cambian de manera continua y no en el modo de paso y disparo habitual. Por consiguiente, puede aumentarse esencialmente la velocidad de obtención de imágenes.

Breve descripción de los dibujos

25 Detalles y ventajas adicionales de la invención se describen a continuación con referencia a los dibujos adjuntos, que se muestran en:

las figuras 1 y 2: representaciones esquemáticas del dispositivo de obtención de imágenes que realiza la presente invención;

30 la figura 3: un diagrama de flujo esquemático que ilustra realizaciones de los método de reconstrucción de imágenes y de obtención de imágenes inventivos; y

la figura 4: resultados experimentales que ilustran la calidad de imagen mejorada obtenida con la presente invención.

55

Descripción de realizaciones preferidas

Realizaciones preferidas de la invención se describen en el presente documento con referencia a modo de ejemplo a tomografía de transmisión, en particular a TC, y obtención de imágenes plana. Detalles de medición de técnicas, como por ejemplo detalles de TC u otro dispositivo de transmisión de rayos X de obtención de imágenes y modos de funcionamiento cuyos dispositivos no se describen tanto como se conocen a partir de técnicas convencionales. Además, la invención no se limita a obtención de imágenes médica, sino más bien puede implementarse también para obtener imágenes de otros objetos, como por ejemplo piezas de trabajo.

65 Realizaciones de la invención se describen a continuación con referencia a las etapas de procedimiento de los métodos inventivos. Al implementar estas características como herramientas de procesamiento de datos

aplicadas a datos no procesados obtenidos con una sistema de medición (dispositivo de obtención de imágenes) dependerán por ejemplo del sistema de medición utilizado y el tipo de objeto del que van a obtenerse imágenes en la práctica. Aunque el entendimiento y la implementación de las características se basa en los antecedentes matemáticos descritos a continuación, el experto en la técnica reconocerá que la invención no se limita a cada detalle matemático, sino que cubre todas las herramientas de procesamiento de datos basándose generalmente en estos antecedentes matemáticos.

1. Dispositivo de obtención de imágenes

La figura 1 ilustra esquemáticamente una vista esquemática de la primera realización (realización de TC) de un dispositivo de obtención de imágenes 100 que incluye una fuente 10 de rayos X, un dispositivo detector 20, un dispositivo de reconstrucción 30, un portador de objeto 40, y un portador de la fuente y el detector 50. Los componentes 10, 20, 40 y 50 están estructurados como en un dispositivo de TC convencional de cualquier generación. En particular, el dispositivo detector 20 comprende una capa de conversión 21 para convertir radiación de rayos X en radiación óptica y una capa de detección 22 con una serie de elementos de detector 23.i ($i = 1, 2, 3, \dots$), que se disponen en una geometría unidimensional o, más habitualmente, en una geometría bidimensional (tal como una serie en forma de matriz o en forma de línea, o una serie curva o plana). El detector diseñado mostrado en la presente memoria es solo para ilustración; son posibles otros diseños (por ejemplo, detectores con una superficie curva). El portador de fuente y de detector 50 está montado de manera rotatoria de manera que puede rotar en un plano x-y (plano de dibujo) alrededor del portador de objeto 40. El portador de objeto 40 es un dispositivo de soporte, por ejemplo una mesa, configurada para alojar el objeto 1, por ejemplo un paciente que va a examinarse. Como ejemplo, el portador de objeto 40 comprende una cama de transporte para alojar el paciente tal como se ilustra esquemáticamente en la figura 1. El portador de fuente y de detector 50 comprende por ejemplo un carril circular al que están unidos la fuente 10 de rayos X y el dispositivo detector 20. El portador de objeto 40 y el portador de detector 50 pueden trasladarse entre sí en una dirección perpendicular al plano x-y.

El objeto 1 es, por ejemplo, un paciente humano, en el que una parte determinada (región de examen), por ejemplo el cerebro que va a examinarse con el método de obtención de imágenes inventivo. En términos de la obtención de imágenes y el método de reconstrucción de imágenes, la región de examen se considera que consiste en una pluralidad de vóxels 2. El vóxel 2 j -ésimo se muestra esquemáticamente con fines ilustrativos.

El dispositivo de reconstrucción 30 comprende un circuito de entrada 31, un circuito de procesamiento 32, un circuito de salida 33 y un almacenamiento de entradas 34. El circuito de entrada 31 está dispuesto para recibir los datos de detector (datos sin procesar) y entradas adicionales, que se utilizan para implementar el método inventivo de reconstrucción de imágenes. Con este fin, el dispositivo detector 20 se conecta con el circuito de entrada 31 para transferir datos de detector γ_i y los parámetros geométricos asociados tales como el avance de la mesa o la posición angular α_i . Además, el circuito de entrada 31 se conecta con el almacenamiento de entradas 34 que está dispuesto para almacenar la matriz de sistema A_{ij} , la base T y opcionalmente una función de regularización R . El circuito de procesamiento 32 incluye una unidad informática, que se configura para implementar el procesamiento de datos del método de reconstrucción de imágenes. Finalmente, el circuito de salida 33 puede comprender un elemento de visualización 33.1, un almacenamiento de datos 33.2 y/o una interfaz 33.3. En particular, el circuito de salida 33 puede incluir un nodo Dicom. El dispositivo de reconstrucción 30 puede implementarse con un ordenador estándar que presente una configuración de hardware apropiada, que incluye preferiblemente una aceleración de GPU.

La figura 1 ilustra esquemáticamente el proceso de obtención de imágenes. El coeficiente de atenuación en el vóxel j , f_j^A , contribuye a un factor de atenuación de $e^{-A_{ij}f_j^A}$ a la señal de promedio f_i^B que llega en la posición i' de la capa de conversión, véase la Ec. (1) a continuación. Esta señal ideal se modifica además mediante la función de respuesta (modelada por una matriz $B_{i'i}$) del detector sistema, es decir la señal f_i^B en i' añade la cantidad $B_{i'i'}f_i^B$ a la señal de promedio real $\bar{\mu}_i^*$ grabada finalmente en el píxel de detector i (Ec. (2) a continuación). Para la TC, el tubo y el detector se hacen rotar alrededor del paciente e imágenes se toman para muchos ángulos.

La figura 2 ilustra una vista esquemática de la segunda realización (realización de obtención de imágenes plana) de un dispositivo de obtención de imágenes 100 que incluye una fuente 10 de rayos X, un dispositivo detector 20, un dispositivo de reconstrucción 30 y un portador de objeto 40. Para la obtención de imágenes por rayos X plana, el proceso de obtención de imágenes es similar a la figura 1 pero existe sólo una imagen que va a tomarse y el tubo y detector no se hacen rotar alrededor del objeto 1.

2. Reconstrucción de imágenes y método de obtención de imágenes

Con la situación representada en las figuras 1 y 2, se presenta un mapa de atenuación (tridimensional) f_j^A (el subíndice j indica los vóxels, de los que existen v_A) que se proyecta a través de proyecciones de rayos X de la forma

$$f_i^B = I_0 \exp \left(- \sum_j A_{ij} f_j^A \right) \quad (1)$$

5 en v_B posiciones espaciales sobre la capa de conversión 21, siendo I_0 proporcional a la intensidad del haz de rayos X sin atenuar y A_{ij} es la matriz de sistema $v_B \times v_A$, por ejemplo el núcleo integral discretizado de la transformada de Radon. Tanto los coeficientes de atenuación f_j^A como las entradas de la matriz de sistema A_{ij} son no negativos en fundamentos físicos, y naturalmente la f_i^B son no negativos también. Sin embargo, la capa de detección 22 no mide estas proyecciones directamente. En primer lugar, el detector por sí mismo presenta una función de respuesta que está modelada por una matriz B $n \times v_B$. Puede concebirse como la función de dispersión de punto (PSF) del detector pero también puede contener otras características (lineales). Sin embargo, se requiere que $B_{ii} \geq 0$ para todo i, i' . Además, en la práctica existe siempre una relación de recuento de fondo $r > 0$. Por tanto, la señal de detector promedio se proporciona por

$$\bar{\mu}_i = \sum_{ii'} B_{ii'} f_i^B + r. \quad (2)$$

15 Aún incluso estas proyecciones no se observan directamente, pero actúan como el parámetro de un proceso de Poisson, es decir una medición de un número y_i de cuantos (γ fotones, por ejemplo) extraída a partir de una

$$P(y_i) = e^{-\bar{\mu}_i} \frac{(\bar{\mu}_i)^{y_i}}{y_i!}$$

distribución de Poisson. A partir de estas medidas y_i el objeto original f_j^A que va a reconstruirse de manera tan precisa como sea posible a partir de tan pocas proyecciones como sea posible. Esta es la situación observada habitualmente en la TC. Obsérvese que para la TC, el paciente se observa a partir de muchos ángulos y, por tanto, el índice i (y asimismo i') es de hecho un índice doble $i = (k, \alpha)$ en el que k índices la posición espacial de los píxeles sobre el detector e índices α de los ángulos.

25 Aunque el enfoque principal es la TC (figura 1), con una ligera modificación la invención también puede aplicarse a imágenes planas (figura 2). Tales imágenes planas pueden resultar a partir de una exposición a rayos X única pero también, por ejemplo, a partir de medidas de medicina nuclear plana de cuerpo completo. La única diferencia es que para imágenes planas es que no se está interesado en la información tridimensional completa f_j^A , sino sólo en las proyecciones planas ideales f_i^B , es decir, solo se quiere mejorar las imágenes eliminando la respuesta de detector y el ruido de Poisson, y/o por ejemplo intentando lograr superresolución. Esta diferencia entre reconstrucción plana y tridimensional presentará algunas consecuencias a continuación.

El resultado principal de esta invención es que puede lograrse una reconstrucción precisa de datos de Poisson con ruido con pocas medidas minimizando una expresión de función determinada mostrada a continuación. "Pocas" medidas en la presente memoria significa que de las n medidas, el sistema, en principio, es capaz de hacer (n puede concebirse como la cantidad de píxeles medidos por una TC convencional) sólo k se están haciendo realmente, con $k \ll n$, por tanto ahorrando tiempo y dosis. Se supone (y es razonable suponerlo) que el objeto que está reconstruyéndose puede comprimirse en alguna base ortogonal o biortogonal, en la presente memoria indicada mediante una matriz (bi-)ortogonal T^{-1} . Esto puede ser una base de ondícula, o alguna otra, base específica más problemática. La reconstrucción se realiza encontrando la expresión de minimización \underline{f} de la expresión de función

$$F(\underline{f}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i) + a |T^{-1} \underline{f}|_p \quad (3)$$

45 (cf. Ec. (18) a continuación) con (que utiliza la notación \underline{f} en lugar de f^A por conveniencia)

$$\mu_i = \sum_j B'_{ii} I_0 \exp \left(- \sum_j A_{ij} f_j \right) + r \quad (4)$$

en el caso de una reconstrucción de TC (figura 1) y, en el caso de imágenes planas (figura 2),

$$\mu_i = \sum_j B'_{ii} f_j + r, \quad (5)$$

50

Esta vez escribiendo f en lugar de f^B . La suma en la Ec. (3) examina los píxeles k medidos realmente, y los y_i son los valores de Poisson medidos. De manera correspondiente, la matriz B' es igual a la matriz B completa limitada a los píxeles medidos.

5

Este resultado se muestra para la norma p $|\dots|_p$ con $p = 0$ pero puede extenderse al caso convexo $p = 1$ basándose en [1] y, en fundamentos similares, otras normas de aplicación de dispersión con $0 \leq p < 2$. El factor previo a se conoce para $p = 0$ y puede elegirse de manera empírica o consecuentemente para otros valores de p .

10

Las etapas esenciales del método inventivo de reconstrucción de imágenes se resumen esquemáticamente en la figura 3. En primer lugar, los datos de detector con las posiciones asociadas en relación con el objeto 1 así como las entradas introducidas que permanecen se proporcionan con la etapa S1. Posteriormente, la etapa S2 de reconstrucción hallando la expresión de función de minimización de objeto de la ecuación (3) se lleva a cabo, seguida por la etapa S3 de presentar la imagen reconstruida que consiste en la expresión de minimización de la expresión de función.

15

La etapa S1 en particular incluye la proporción (etapa S11) de los datos de detector (como medidos preferiblemente) a partir de posiciones y ángulos asociados de los elementos de detector 23. La etapa S11 depende de condiciones de aplicación particulares y la fuente de datos utilizadas. Los datos de detector y posiciones pueden medirse (etapa S01) e introducirse directamente a partir del dispositivo detector 20 (figuras 1 o 2). En este caso, el procedimiento de la figura 3 que incluye la etapa S01 representa una realización del método de obtención de imágenes inventivo. La medición de los datos de detector se lleva a cabo tal como se conoce habitualmente de dispositivos de transmisión de rayos X o de TC. Opcionalmente, la selección un número de medidas dependiendo de la calidad de imagen que va a obtenerse puede proporcionarse basándose en las consideraciones resumidas a continuación. Además, como alternativa, los datos de detector y posiciones pueden introducirse por medio de un canal de comunicación de datos (etapa S02). Con esta variante, las etapas S1 a S3 representan una realización del método inventivo de reconstrucción de imágenes.

20

25

La etapa S1 incluye además la etapa S12 de determinación de una base de dispersión T que es adecuada para el objeto medido, por ejemplo una base de ondícula con soporte finito. Dependiendo del tipo de objeto, la base puede almacenarse en el almacenamiento de entradas 34 (figuras 1 o 2). Además, la etapa S1 incluye la proporción de una matriz de sistema predeterminada A_{ij} (etapa S13). La matriz de sistema se calcula o adquiere a partir de los datos del sistema de referencia. En particular, la matriz de sistema representa la contribución del vóxel j -ésimo a los datos de detector i -ésimos (figuras 1 ó 2).

30

35

Con la etapa S2, el procesamiento de datos se lleva a cabo incluyendo la rutina de minimización, en la que el objeto tridimensional se busca, que encuentra el mínimo global de la expresión de función de minimización de objeto de la ecuación (3). Detalles de esta expresión de función se describirán en la sección 3. a continuación.

40

Finalmente, el resultado de la rutina de minimización se envía como el resultado final con la etapa S3, en la que se transfiere por ejemplo a un nodo Dicom incluido en el circuito de salida 33 (figuras 1 o 2).

3. Antecedentes matemáticos

45

A continuación, se demuestra que el resultado aparentemente contraintuitivo y decepcionante presentado por Rebecca M. Willett *et al.* es esencialmente debido a una noción demasiado restrictiva de "error": ya que la varianza de una variable aleatoria de Poisson aumenta cuando su valor promedio aumenta, no puede esperarse para obtener la misma precisión absoluta cuando f_j^* es grande que cuando f_j^* es pequeña. Aunque la medición de error utilizada en el documento por Rebecca M. Willett *et al.* fuera el riesgo

50

$$R(f^*, f) = \frac{1}{v} \sum_v (f_j - f_j^*)^2$$
 (hasta la normalización), que no tiene esto en cuenta. Obsérvese que esta observación no presenta nada que hacer con el tipo de algoritmo de reconstrucción y se basa en la naturaleza de las estadísticas de Poisson.

55

Cuando la definición de "riesgo" se modifica para reflejar este hecho, se mostrará que los principios de detección de compresión puede pretender ser útil y permitir la reconstrucción de f_j^* fielmente dentro de los límites dados por naturaleza.

3.1 Discusión preliminar y anotaciones

60

Aplicar la estrategia de detección de comprimidos a la tarea de obtención de imágenes anterior se basa en las consideraciones siguientes. El enfoque convencional elegiría una matriz aleatoria adecuada B_{ij} de tamaño $k \times v_B$ con $k \ll v_B$, tal como por ejemplo la sugerida para ruido gaussiano en [2] o para ruido de Poisson en [3]. Es decir, sin embargo, no hay una opción en el establecimiento geométrico dado de una medida en la que está

fijada la matriz de sistema. Los inventores, por tanto, eligen una estrategia diferente, que es tomar las matrices de sistema A_{ij} y B_{ij} como dadas y en su lugar seleccionar aleatoriamente un subconjunto pequeño de tamaño k de las n medidas potenciales y_i . Esto es similar a, por ejemplo, [4] pero con la diferencia importante de que en este caso existe también ruido. Obsérvese que esta selección aleatorizada es una herramienta matemática que permite demostrar los resultados. En la práctica, la medición de un subconjunto elegido de manera completamente aleatoria de los píxeles disponibles no es necesariamente práctica ya que muchos píxeles se combinan en un único detector y no hay mediciones de algunos de ellos serían un residuo; en cambio, sin embargo, podría medirse el objeto en un subconjunto pequeño de ángulos (quizás aleatorizado) y por tanto lograr una reducción en las mediciones. El resultado mostrado a continuación es que en promedio, la reconstrucción \underline{f} obtenida alcanzaría unas proyecciones “ideales” (es decir sin ruido)

$$\bar{\mu}_i = \sum_j B_{ij} I_0 \exp(-\sum_j A_{ij} f_j) + r \text{ (or } \bar{\mu}_i = \sum_j B_{ij} f_j)$$
 que están muy cerca de los valores verdaderos $\bar{\mu}_i^*$ (en un sentido que se definirá en más detalle a continuación) incluso para aquellas de las n medidas potenciales que no se medirán realmente sino que se omitirán. Por tanto se obtiene un resultado similar como si se hubiera medido el conjunto completo n medidas potenciales.

El enfoque inventivo es una mezcla entre los métodos en [2] y [4]. Los inventores adaptan los métodos para tratar con el ruido a partir de [2] a ruido de Poisson y llevar la estrategia de subconjuntos de medidas aleatorias a partir de [4]. Esto presenta la consecuencia de que un aspecto importante del enfoque de matriz aleatorio habitual se pierde. Matrices aleatorias adecuadas son con incoherentes con altas posibilidades con cualquier base de compresibilidad, que significa que la base de compresibilidad es arbitraria. En este caso, la situación es diferente (obsérvese a continuación).

El número de proyecciones n se supone que es del mismo orden que el número de píxeles o de vóxeles $V_{A/B}$, es decir $n = O(V_{A/B})$, de manera que puede esperarse conseguir una buena reconstrucción con métodos ordinarios (es decir sin utilizar detección de comprimidos). Sólo el subconjunto pequeño aleatorio $i \in \Omega \subset \{1, \dots, n\}$ de las proyecciones potenciales se mide realmente. El conjunto Ω presenta tamaño k , y se mostrará finalmente que k puede ser mucho más pequeño que n mientras que aún se permite la reconstrucción precisa. Por tanto las proyecciones reales se escriben como

$$\mu_i^* = \sum_j P_{ij} \bar{\mu}_j^*, \quad i = 1, \dots, k \tag{6}$$

en las que P_{ij} es una matriz de selección aleatoria $k \times n$ de todo 0, excepto para exactamente un 1 en una posición aleatoria uniformemente distribuida en cada fila, siendo diferentes filas independientes. Para cada una de estas proyecciones aleatorias se mide una variable de Poisson con ruido $y_i, i = 1, \dots, k$. Obsérvese que esta definición permite, en principio, que se realicen múltiples medidas de las mismas proyecciones. Sin embargo, la probabilidad de que esto suceda es pequeña cuando $n \gg k$.

Con el fin de medir la precisión de la reconstrucción posible se utiliza la siguiente definición de riesgo. Una

reconstrucción tridimensional potencial \underline{f} producirá proyecciones ideales
$$\bar{\mu}_i = \sum_j B_{ij} I_0 \exp(-\sum_j A_{ij} f_j) + r$$
 y presenta riesgo $R(\underline{f})$ con

$$R(\underline{f}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_i^* \log(\bar{\mu}_i)) =: \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i(\bar{\mu}_i). \tag{7}$$

A continuación se utilizará la definición. Para el caso de proyecciones planas el riesgo es el mismo pero en lugar

de la reconstrucción volumétrica depende de la reconstrucción plana \underline{f} por medio de
$$\bar{\mu}_i = \sum_j B_{ij} f_j$$
 y

$$\bar{\mu}_i^* = \sum_j B_{ij} f_j^B$$
 . Para facilitar la lectura, a continuación se utilizará la formulación tridimensional a menos que suponga una diferencia, en cuyo caso ambas variantes se detallarán explícitamente.

Esta definición de riesgo está modelada a partir de la expresión de máxima verosimilitud de función derivada de estadísticas de Poisson y honra el hecho de que la incertidumbre en la estimación de un parámetro de Poisson μ

es del orden de $\sqrt{\mu}$ y no una constante. El riesgo es mínimo cuando $\underline{\mu} = \underline{\mu}^*$, el cual es el caso de cuando $\underline{f} = \underline{f}^{A/B}$. Además, el "exceso de riesgo" definido por

$$r(\underline{f}, \underline{f}^*) := R(\underline{f}) - R(\underline{f}^*) \quad (8)$$

será útil. Es fácil demostrar que si la relación de recuento de fondo $r = 0$, el exceso de riesgo es una función lineal de la intensidad I_0 . Esto también se mantiene aproximadamente si $I_0 \propto r$. Por tanto el exceso de riesgo es una medida para el error absoluto en las proyecciones (doblando los valores de proyección medidos promedio doblando la intensidad I_0 resulta en dos veces el exceso de riesgo). Más importante, sin embargo, es el error relativo, que es $r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) / I_0$. Finalmente uno obtendrá un límite superior para $r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B})$, y el error relativo puede disminuirse aumentando I_0 .

Esta definición de riesgo no es inmediatamente útil puesto que requiere un conocimiento completo de $\underline{f}^{A/B}$, lo cual es necesario que se estime en primer lugar. Por tanto se necesita estimar el riesgo a partir de los datos disponibles, y esto lleva al riesgo empírico $\hat{R}(\underline{f})$:

$$\hat{R}(\underline{f}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log(\mu_i)) \quad (9)$$

$$\mu_i = \sum_j P_{ij} \bar{\mu}_j.$$

con $\bar{\mu}_j$. De nuevo, esta no es otra que la expresión de máxima verosimilitud de función de estadísticas de Poisson. La función $\hat{R}(\underline{f})$ es un estimador insesgado de $R(\underline{f})$ puesto que en un promedio

$$E \hat{R}(\underline{f}) = \sum_P \text{Prob}(P) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{l=1}^n P_{il} \bar{\mu}_l - \sum_{l=1}^n P_{il} \bar{\mu}_l \log \sum_{m=1}^n P_{im} \bar{\mu}_m \right) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{n^k} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\bar{\mu}_{j_i} - \bar{\mu}_{j_i} \log(\bar{\mu}_{j_i})) = R(\underline{f}). \quad (11)$$

El promedio se denota mediante $E \dots$ e incluye el promedio tanto sobre las estadísticas de Poisson del y_i , que se va a hacer en primer lugar, y sobre las matrices aleatorias P . Las matrices aleatorias pueden escribirse como $P_{ij} = \delta_{ij}$ con j_1, \dots, j_k números enteros aleatorios independientes extraídos con probabilidad uniforme a partir del

$$(P) = \frac{1}{n^k}.$$

conjunto $\{1, \dots, n\}$, y la probabilidad de extraer una matriz particular P es por tanto $\text{Prob}(P) = \frac{1}{n^k}$. Insertando esto en la ec. (10) lleva a la ec. (11). de manera análoga a lo anterior, el exceso de riesgo empírico se define por

$$\hat{r}(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) = \hat{R}(\underline{f}) - \hat{R}(\underline{f}^{A/B}). \quad (12)$$

A continuación se necesitará la propiedad de compresibilidad del objeto $\underline{f}^{A/B}$ en alguna base de dispersión. Dejemos que T^{-1} sea una matriz ortogonal o biortogonal de la cual las filas están llenas con los vectores de base de la dispersión base. Entonces, tomando en consideración sólo objetos $\underline{f}^{A/B}$ para los que los coeficientes en la dispersión base, $\theta^{A/B} = T^{-1} \underline{f}^{A/B}$, obedece

$$|\theta_k^{A/B}| \leq S \sqrt{v_{A/B}} k^{-1/q}, \quad (13)$$

cuando $S > 0$ y $q > 0$ son constantes y los $\theta_k^{A/B}$ están ordenados por tamaño, puede concluirse fácilmente que el error de la mejor aproximación de término m de $\theta^{(m)}$ a $\theta^{A/B}$ está limitado por

$$\frac{1}{v_{A/B}} |\underline{\theta}^{(m)} - \underline{\theta}^{A/B}|^2 = \frac{1}{v_{A/B}} \sum_{k=m+1}^{v_{A/B}} |\theta_k^{A/B}|^2 \leq S^2 \int_m^{v_{A/B}} dx x^{-2/q} \leq \frac{S^2}{\frac{2}{q}-1} m^{1-2/q} = \frac{S^2}{2\alpha} m^{-2\alpha} \quad (14)$$

con $\alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$. Más adelante, también será necesario estimar el error como medidos por la norma l_1 , y por un cálculo similar se obtiene

5

$$|\underline{\theta}^{(m)} - \underline{\theta}^{A/B}|_1 = \sum_{k=m+1}^{v_{A/B}} |\theta_k^{A/B}| \leq \frac{S\sqrt{v_{A/B}}}{\alpha - \frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}-\alpha} \quad (15)$$

Con el fin de que esto sea útil, es necesario requerir que $\alpha > \frac{1}{2}$, de manera que $0 < q < 1$, es decir los objetos considerados necesitan poder comprimirse de manera razonablemente fuerte. Para el objeto de "espacio real" $\underline{f}^{(m)} = T\underline{\theta}^{(m)}$ sigue que

10

$$\frac{1}{v} |\underline{f}^{(m)} - \underline{f}^{A/B}|^2 = \frac{1}{v} |T(\underline{\theta}^{(m)} - \underline{\theta}^{A/B})|^2 \leq \frac{1}{v} \|T\|^2 |\underline{\theta}^{(m)} - \underline{\theta}^{A/B}|^2 \leq \|T\|^2 \frac{S^2}{2\alpha} m^{-2\alpha} \quad (16)$$

con la norma de matriz l_2 $\|\cdot\|$. Asimismo puede mostrarse que esto implica

15

$$\frac{1}{v_{A/B}} |\underline{f}^{A/B}|^2 = \frac{1}{v_{A/B}} |T\underline{\theta}^{A/B}|^2 \leq \|T\|^2 D^2 \quad (17)$$

con alguna constante positiva D , es decir los objetos $\underline{f}^{A/B}$ vienen de una esfera de radio

20

$$\|T\| D \sqrt{v_{A/B}} .$$

3.2 Desigualdad de Oracle

Aunque el riesgo $R(\underline{f})$ no sea directamente aplicable, es muy útil puesto que permite derivar una "desigualdad de Oracle" que establece que el riesgo empírico promedio $ER(\underline{f})$ de una reconstrucción (obtenido de un modo que va a describirse a continuación) tomado de un conjunto candidato está, en líneas generales, dentro de un factor constante del riesgo ideal $R(\underline{f}_{min})$ de la mejor aproximación \underline{f}_{min} en el conjunto candidato. Esto significa que aunque se tenga conocimiento completo de $\underline{f}^{A/B}$ y por tanto pueda encontrar la aproximación óptima en el conjunto candidato, esta aproximación óptima sólo será ligeramente mejor que lo que puede hallarse sin este conocimiento previo.

30

Siguiendo [2] muy de cerca, se mostrará que para

$$\underline{f}_{min} = \arg \min_{\underline{f}} \left(R(\underline{f}) + \frac{c(\underline{f}) \log 2}{k_0} \right), \quad (18)$$

35

en la que $c(\underline{f})$ es un término de penalización que envuelve la norma l_0 denotada por $|\dots|_0$ de la forma

$$c(\underline{f}) = \text{const.} \times \log(v) |T^{-1} \underline{f}|_0, \quad (19)$$

40 el riesgo está limitado por

$$Er(\hat{f}_{\underline{\min}}, \underline{f}^{A/B}) \leq C_1 \left(r(\underline{f}_{\underline{\min}}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}_{\underline{\min}}) \log 2 + 4}{k\delta} \right) \quad (20)$$

con una constante C_1 del orden de 1 y δ una constante que va a especificarse más adelante.

5 3.2.1. Prueba de la desigualdad de Oracle

Se considera

$$\hat{r}(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [\mu_i - y_i \log(\mu_i) - (\mu_i^* - y_i \log(\mu_i^*))] \quad (21)$$

$$=: -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_i. \quad (22)$$

10

Abreviando $\mu_i - y_i \log(\mu_i) = \xi_i$ y $\mu_i^* - y_i \log(\mu_i^*) = \xi_i^*$, se presenta $u_i = \xi_i^* - \xi_i$. Las u_i son variables aleatorias distribuidas de manera idéntica, independientes. Además,

$$r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{\mu}_j - \bar{\mu}_j^* \log(\bar{\mu}_j))}_{=E\xi_i} - \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{\mu}_j^* - \bar{\mu}_j \log(\bar{\mu}_j^*)) \right)}_{=E\xi_i^*} \right] \quad (23)$$

$$= -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Eu_i, \quad (24)$$

15

$$\hat{r}(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) - r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (u_j - Eu_j).$$

por tanto

Entonces, la desigualdad de Craig-Bernstein

[5] puede aplicarse, lo que establece que la probabilidad de

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (u_j - Eu_j) \geq \frac{t}{k\delta} + k\delta \frac{\text{Var}(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k u_j)}{2(1-\zeta)} \quad (25)$$

20

es menor que o igual a e^{-t} para $0 < \delta h \leq \zeta < 1$ y $t > 0$, siempre y cuando la condición de momento

$$E |u_j - Eu_j|^l \leq \frac{l! \text{Var}(u_j) h^{l-2}}{2} \quad (26)$$

25

se mantenga para todo $l \geq 2$ y algunos fijados $h > 0$. Se mostrará a continuación que puede hallarse una h determinada de manera que la condición de momento se mantiene para u_j . También se observará que

$$\text{Var}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k u_j\right) = \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^k \text{Var}(u_j) \leq \frac{C}{k} r(\underline{f}, \underline{f}^*)$$

con una constante C. Con estos dos hechos, se concluye que pueden encontrarse δ y ζ apropiados de manera que la probabilidad de

$$r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) - \hat{r}(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) \geq \frac{t}{k\delta} + \delta \frac{C}{2(1-\zeta)} r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) \quad (27)$$

5

es menor que e^{-t} . Ahora se introduce a un conjunto candidato finito F a partir del cual encontrar una buena

$$\sum_{\underline{f} \in F} 2^{-c(\underline{f})} \leq 1.$$

aproximación a $\underline{f}^{A/B}$. A cada f se asigna una penalización $c(f)$ que obedece a $\underline{f} \in F$ En esta etapa el conjunto candidato y la penalización son completamente arbitrarios, siempre que se mantenga esta desigualdad.

10

Estableciendo $\delta := e^{-t}$ e insertando $\delta(f) := 2^{-c(f)} \delta$ en lugar de e^{-t} en la inec. (27), la probabilidad de que por lo

$$\sum_{\underline{f} \in F} \delta(\underline{f}) \leq \delta$$

menos un $\underline{f} \in F$ incumpla la inec. (27) es menor que (desigualdad de Boole).

Con probabilidad $1-\delta$ por tanto, la desigualdad

15

$$r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) - \hat{r}(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) \leq \frac{c(\underline{f}) \log 2 - \log \delta}{k\delta} + \delta \frac{C}{2(1-\zeta)} r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) \quad (28)$$

se mantiene para todo $\underline{f} \in F$.

20

Dejamos $\zeta = \delta h$ y $a := \frac{\delta C}{2(1-\zeta)}$. Entonces elegir algunos $0 < \delta < \frac{2}{C+2h}$ garantiza que $0 < a < 1$ y $\zeta < 1$. Por tanto

$$(1-a)r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) \leq \hat{r}(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}) \log 2 - \log \delta}{k\delta} \quad (29)$$

25

con probabilidad por lo menos $1 - \delta$ para todo $\underline{f} \in F$ y todos $0 < \delta \leq 1$.

El límite en el riesgo es mínimo para que \underline{f} que minimiza el riesgo empírico penalizado:

$$\hat{\underline{f}}_{\min} = \arg \min_{\underline{f} \in F} \left(\hat{r}(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}) \log 2}{k\delta} \right) = \arg \min_{\underline{f} \in F} \left(R(\underline{f}) + \frac{c(\underline{f}) \log 2}{k\delta} \right). \quad (30)$$

30

Dejamos que f_{\min} sea el elemento de F que minimiza el riesgo (verdadero) penalizado, es decir

$$\underline{f}_{\min} = \arg \min_{\underline{f} \in F} \left(R(\underline{f}) + \frac{c(\underline{f}) \log 2}{k\delta} \right), \quad (31)$$

35

entonces

$$(1-a)r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}_{\min}) \log 2 - \log \delta}{k\delta} \quad (32)$$

(con probabilidad de por lo menos $1-\delta$) puesto que \underline{f}_{\min} minimiza el riesgo empírico penalizado, y sustituyéndolo por \underline{f}_{\min} en el lado de mano derecha sólo puede hacer más grande el límite.

Repitiendo la aplicación de la desigualdad de Craig-Bernstein para $r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) - r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B})$ (obsérvese que el signo está invertido en comparación con la exposición anterior, pero la desigualdad de Craig-Bernstein puede emplearse en cualquier caso) se produce

$$r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) - r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq ar(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) - \frac{\log \delta}{k\delta} \quad (33)$$

con probabilidad por lo menos $1-\delta$. Utilizando la desigualdad de Boole de nuevo para estimar la probabilidad de que las inec. (32) y (33) se cumplen simultáneamente se produce

$$r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq \frac{1+a}{1-a} r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}_{\min}) \log 2 - 2 \log \delta}{k\delta(1-a)} \quad (34)$$

con probabilidad por lo menos $1-2\delta$.

$$EX \leq \int_0^{\infty} dt \text{Prob}(X \geq t),$$

Puesto que por cualquier variable aleatoria X , puede elegirse

$$X = r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) - \frac{1+a}{1-a} r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) - \frac{c(\underline{f}_{\min}) \log 2}{k\delta(1-a)} \quad \text{y } \delta = e^{-k\delta(1-a)/2} \text{ e integrar la inec. (34) sobre } t, \text{ que}$$

da finalmente un límite para $Er(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B})$:

$$Er(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq \frac{1+a}{1-a} r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}_{\min}) \log 2 + 4}{k\delta(1-a)} \quad (35)$$

$$\leq \frac{1+a}{1-a} \left(r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}_{\min}) \log 2 + 4}{k\delta} \right). \quad (36)$$

Esta es la desigualdad anunciada anteriormente con

$$C_1 = \frac{1+a}{1-a}.$$

3.2.2. Prueba de la condición de momento

Para la prueba de las condiciones de momento hay que ocuparse de dos dificultades: en primer lugar, las variables aleatorias no son gaussianas independientes simples como en [2] sino dependientes poissonianas en los valores μ_i que son variables aleatorias en sí mismos, y segundo, no puede utilizarse caos de Rademacher. El caos de Rademacher, por su aleatoriedad de signos, puede ocuparse de la dispersión en cualquier base (la medida base es con alta probabilidad incoherente con cualquier otra base). En este caso, se observará que la dispersión base T debe ser incoherente con la matriz de sistema A . Esta está en línea con el resultados a partir de [4].

Se necesita mostrar que la condición de momento (26) se mantiene para algún $h > 0$ y todos $l \geq 2$. Según [2] es suficiente hallar una constante adecuada h' para todo incluso l ya que esto implica que la condición de momento

se mantiene para todo l con $h = 2h'$ (Lemma 1 de [2]). La variable aleatoria $u_j - Eu_j$ puede dividirse en dos partes, $u_j - Eu_j = X_1 + X_2$, con

$$X_1 := -(\mu_j - E\mu_j) + \mu_j^* \log(\mu_j) - E\mu_j^* \log(\mu_j) + \mu_j^* - E\mu_j^* - (\mu_j^* \log(\mu_j^*) - E\mu_j^* \log(\mu_j^*)) \quad (37)$$

5

$$X_2 := (y_j - \mu_j^*) \log(\mu_j) - (y_j - \mu_j^*) \log(\mu_j^*), \quad (38)$$

cada las cuales es una variable aleatoria con promedio cero. Además, $EX_1X_2 = 0$. Por tanto, puede aplicarse Lemma 2 de [2] y concluir que $X_1 + X_2$ cumple la condición de momento (26) para todo incluso $l \geq 4$ con

10 constante $h' = \sqrt{2}(h_1 + h_2)$ si X_1 y X_2 las cumple por separado con constantes h_1 y h_2 .

Condición de momento para X_1 y X_2

15 Una variable aleatoria limitada X con promedio cero y $|X| \leq X_{\text{máx}}$ cumple la condición de momento trivialmente con constante $h_X = X_{\text{máx}}/3$. Si se observa que

$$\bar{\mu}_i^* = I_0 \exp\left(-\sum_j A_{ij} f_j^{A/B}\right) + r \leq A_{\text{máx}}, \quad (39)$$

20 en la que $A_{\text{máx}}$ es la dosis máxima por píxel (más relación de recuento de fondo) del TC (o rayos X u otro dispositivo en mano), entonces $\bar{\mu}_i^*$ está limitado superiormente por la constante $A_{\text{máx}}$. Esto sigue puesto que ambos $f_i^{A/B}$ y A_{ij} son no negativos. Sin pérdida de generalidad se presenta $A_{\text{máx}} > 1$.

Obsérvese que $A_{\text{máx}}$ es una constante de máquina y no depende de $v_{A/B}$.

25 Puesto que también está limitado desde abajo por r , puede escribirse (aumentando $A_{\text{máx}}$ si es necesario)

$$\bar{\mu}_j^* \geq \frac{1}{A_{\text{máx}}}. \quad (40)$$

30 Mediante el mismo argumento, se mantienen los mismos límites para las proyecciones candidatas μ_i . Entonces sigue que $|X_1| \leq \text{const.} \times A_{\text{máx}} \log(A_{\text{máx}})$, y por tanto la condición de momento se mantiene. Permanece para mostrar que la condición de momento también se mantiene para X_2 . Se considera

$$EX_2^{2m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{2m}(\bar{\mu}_i^*) \log^{2m} \left(\frac{\bar{\mu}_i}{\bar{\mu}_i^*} \right) \quad (41)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_2(\bar{\mu}_i^*) \log^2 \left(\frac{\bar{\mu}_i}{\bar{\mu}_i^*} \right) \frac{M_{2m}(\bar{\mu}_i^*)}{M_2(\bar{\mu}_i^*)} \log^{2m-2} \left(\frac{\bar{\mu}_i}{\bar{\mu}_i^*} \right). \quad (42)$$

35 En este caso, $M_{2m}(\mu)$ es el momento central $2m$ -ésimo de una variable de Poisson con parámetro μ . El segundo logaritmo en el lado de mano derecha puede estimarse mediante

$$\log^{2m-2} \left(\frac{\bar{\mu}_i}{\bar{\mu}_i^*} \right) \leq \log^{2m-2} (A_{\text{máx}}^2). \quad (43)$$

40 Se muestra en el apéndice que los momentos centrales obedecen a $M_{2m}(\mu) \leq (2m)!(\text{máx}(1, \mu))^m$, de manera que

$$\frac{M_{2m}(\bar{\mu}_i^*)}{M_2(\bar{\mu}_i^*)} \leq (2m)! \frac{(\max(1, \bar{\mu}_i^*))^m}{\bar{\mu}_i^*} \leq (2m)! A_{\max}^{\frac{2m-2}{2}} \frac{\max(1, \bar{\mu}_i^*)}{\bar{\mu}_i^*} \quad (44)$$

$$\leq (2m)! \sqrt{A_{\max}^{2m-2}} A_{\max} \leq \frac{(2m)!}{2} (\sqrt{2} A_{\max})^{2m-2}. \quad (45)$$

La última etapa es válida para todo $m \geq 2$. Conjuntamente se obtiene el límite

$$EX_2^{2m} \leq \frac{(2m)!}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_2(\bar{\mu}_i^*) \log^2 \left(\frac{\bar{\mu}_i^*}{\mu_i} \right) \left(2\sqrt{2} A_{\max} \log(A_{\max}) \right)^{2m-2} \quad (46)$$

$$= \frac{(2m)!}{2} \text{Var}(X_2) \left(2\sqrt{2} A_{\max} \log(A_{\max}) \right)^{2m-2}, \quad (47)$$

5

que es la condición de momento para X_2 .

Conjuntamente, ahora se establece que $X_1 + X_2$ obedece a la condición de momento con un parámetro h con

10

$$h = \text{const.} \times A_{\max} \log(A_{\max}). \quad (48)$$

2. El límite superior para $\text{Var}(u_j)$

15

La última tarea es hallar un límite superior para $\text{Var}(u_j)$, en el que $u_j = \xi_j^* - \xi_j$ y $\xi_j^* = \mu_j^* - y_j \log(\mu_j^*)$, $\xi_j = \mu_j - y_j \log(\mu_j)$. Es fácil demostrar que los valores promedio Eu_j y Eu_j^2 se dan mediante

$$Eu_j = -\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B})) \quad (49)$$

20

$$Eu_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left[(R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B}))^2 + \bar{\mu}_l^* (\log(\bar{\mu}_l) - \log(\bar{\mu}_l^*))^2 \right]. \quad (50)$$

Para la definición de $R_l(f)$ véase Sec. 2. La varianza es entonces

$$\text{Var}(u_j) = \frac{1}{n^2} \sum_{l,l'=1}^n (R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B})) (R_{l'}(\underline{f}) - R_{l'}(\underline{f}^{A/B})) (n\delta_{ll'} - 1) + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \bar{\mu}_l^* (\log(\bar{\mu}_l) - \log(\bar{\mu}_l^*))^2 \quad (51)$$

25

$$\leq \frac{n-1}{n^2} \sum_{l=1}^n (R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B}))^2 + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \bar{\mu}_l^* (\log(\bar{\mu}_l) - \log(\bar{\mu}_l^*))^2. \quad (52)$$

La desigualdad sigue porque cada término $R_l(f) - R_l(f^{A/B})$ es no negativo y por tanto pueden omitirse algunos de los términos con un signo negativo en la primera suma sustituyendo $n\delta_{ll'}-1$ por $n\delta_{ll'}\delta_{ll'}$.

30

Puesto que $\frac{1}{A_{\max}} \leq \bar{\mu}_l, \bar{\mu}_l^* \leq A_{\max}$, de manera que

$$R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B}) \leq A_{\max} - \frac{1}{A_{\max}} + 2A_{\max} \log(A_{\max}), \quad (53)$$

$$\frac{n-1}{n^2} \sum_{l=1}^n (R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B}))^2 \leq \left(A_{\max} - \frac{1}{A_{\max}} + 2A_{\max} \log(A_{\max}) \right) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B})) \quad (54)$$

$$= \left(A_{\max} - \frac{1}{A_{\max}} + 2A_{\max} \log(A_{\max}) \right) r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}). \quad (55)$$

Queda por limitar el término $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (\log(\bar{\mu}_l) - \log(\bar{\mu}_l^*))^2$. Con este fin, se consideran las funciones $h_y(x) = y(\log x - \log y)^2$ y $g_y(x) = x - y \log x - (y - y \log y)$. Ambas alcanzan su mínimo global 0 en $x = y$ y presentan cero derivado en

este caso. Sus segundos derivados son $h''_y(x) = \frac{2y}{x^2}(1 + \log y - \log x)$ y $g''_y(x) = \frac{y}{x^2}$, lo que implica $h''_y(x) \leq 2(1 + |\log$

$y - \log x|)g''_y(x) \leq 2(1 + 2\log(A_{\max}))g''_y(x)$ para $\frac{1}{A_{\max}} \leq x, y \leq A_{\max}$.

Por tanto $h_y(x) \leq 2(1 + 2\log(A_{\max}))g_y(x)$. En consecuencia,

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \bar{\mu}_l^* (\log(\bar{\mu}_l) - \log(\bar{\mu}_l^*))^2 \leq 2(1 + 2\log(A_{\max})) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (R_l(\underline{f}) - R_l(\underline{f}^{A/B})) \quad (56)$$

$$= 2(1 + 2\log(A_{\max}))r(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}). \quad (57)$$

Combinados, se obtiene

$$\text{Var}(u_j) \leq Cr(\underline{f}, \underline{f}^{A/B}) \quad (58)$$

con

$$C = (A_{\max} + 2)(2\log(A_{\max}) + 1) - \frac{1}{A_{\max}}. \quad (59)$$

3.3 Aplicación de la desigualdad de Oracle a objetos que pueden comprimirse

Un objeto que puede comprimirse $f^{A/B}$ es uno que puede representarse apropiadamente mediante un número

pequeño de coeficientes en alguna base. Para ser precisos, si $f_i^{A/B} = \sum_j T_{ij} \theta_j^{A/B}$ en la que T_{ij} es una matriz biortogonal y $\theta_j^{A/B}$ son los coeficientes, y si $\underline{f}^{(m)}$ es la mejor aproximación de término m a $\underline{f}^{A/B}$ en esta base, entonces tal como se muestra anteriormente el error

$$\frac{1}{v_{A/B}} \|\underline{f}^{(m)} - \underline{f}^{A/B}\|^2 \leq \|T\|^2 \frac{S}{2\alpha} m^{-2\alpha} \quad (60)$$

decae por lo menos tan rápido como $m^{-2\alpha}$ si $\underline{f}^{A/B}$ puede comprimirse. Tales objetos que pueden comprimirse

también entran dentro de una esfera de radio $\|T\| D \sqrt{v_{A/B}}$ con alguna constante $D > 0$.

Desde la desigualdad de Oracle se sabe que

$$\text{Er}(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq C_1 \left(r(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) + \frac{c(\underline{f}_{\min}) \log 2 + 4}{k\delta} \right),$$

en la que \underline{f}_{\min} es ese vector del conjunto candidato F que minimiza el riesgo. Esto se puede reformular en términos de los coeficientes de vectores $\underline{\theta}^{A/B}$ de $\underline{f}^{A/B}$, $\underline{\theta}$ de \underline{f} y

$\underline{\theta}_{\min}$ de \underline{f}_{\min} :

$$\text{Er}(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq C_1 \left(r(T\underline{\theta}_{\min}, T\underline{\theta}^{A/B}) + \frac{c(T\underline{\theta}_{\min}) \log 2 + 4}{k\delta} \right). \quad (61)$$

El conjunto candidato F se elige para componerse de todos \underline{f} que cumplen los límites $f \geq 0$ y

$$\|\underline{f}\| \leq \|T\| D \sqrt{v_{A/B}},$$

se pueden comprimir y que presentan una representación $\underline{f} = T\underline{\theta}$ en la que los coeficientes θ_i se cuantifican de manera uniforme a niveles νp . Haciendo que T sea el conjunto de coeficientes de vectores $\underline{\theta}$ que corresponden al conjunto F. La penalización se elige para ser

5

$$c(T\underline{\theta}) = (1 + p) \log(v_{A/B}) \|\underline{\theta}\|_0, \quad (62)$$

es decir, igual a la norma $\|\cdot\|_0$ (el número de elementos no nulos) de $\underline{\theta}$, hasta un factor. Esta penalización cumple

$$\sum_{\underline{\theta} \in T} 2^{-c(\underline{\theta})} \leq 1,$$

10

lo que se llama desigualdad de Kraft en este contexto. También será denotado por $c(\underline{\theta})$ (en lugar de $c(T\underline{\theta})$) por brevedad.

Haciendo que $\underline{\theta}^{(m)}$ sea el coeficiente de vector que corresponde al mejor m -término aproximado a $\underline{f}^{A/B}$, es decir $\underline{f}^{(m)} = T\underline{\theta}^{(m)}$, y haciendo que $\underline{\theta}_{-q}^{(m)} \in T$ sea el elemento más cercano a $\underline{\theta}^{(m)}$ en T. Uno puede ahora reemplazar $\underline{\theta}_{min}$ en la desigualdad de Oracle por $\underline{\theta}_{-q}^{(m)}$ puesto que

15

$$r(T\underline{\theta}_{min}, T\underline{\theta}^{A/B}) + \frac{c(\underline{\theta}_{min}) \log 2 + 4}{k\delta} \leq r(T\underline{\theta}_{-q}^{(m)}, T\underline{\theta}^{A/B}) + \frac{c(\underline{\theta}_{-q}^{(m)}) \log 2 + 4}{k\delta}$$

por definición de $\underline{\theta}_{min}$.

A continuación se puede estimar $r(T\underline{\theta}_{-q}^{(m)}, T\underline{\theta}^{A/B})$ observando que

20

$$r(T\underline{\theta}_{-q}^{(m)}, T\underline{\theta}^{A/B}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{\mu}_k \left(\frac{\bar{\mu}_k}{\mu_k} - 1 - \log \frac{\bar{\mu}_k}{\mu_k} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \max \left(1, \frac{\bar{\mu}_k}{\mu_k} \right) |\bar{\mu}_k - \mu_k|. \quad (63)$$

Esto se desprende de las propiedades fácilmente demostrables $x - 1 - \log x \leq \max(x, \frac{1}{2}) - 1$ para todos los $x > 0$. Uno debe distinguir ahora entre obtención de imágenes tridimensional y plana. Para reconstrucción tridimensional uno presenta

25

$$\bar{\mu}_k^* = I_0 \sum_i B_{ki} \exp \left(- \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} \theta_l^A \right) + r, \quad (64)$$

mientras que para obtención de imágenes plana

30

$$\bar{\mu}_k^* = \sum_{il} B_{ki} T_{il} \theta_l^B + r. \quad (65)$$

Expresiones análogas consideran $\bar{\mu}_k^*$ por remplazo de $\theta_l^{A/B}$ por $\theta_{q,l}^{(m)}$.

En el caso anterior se presenta para $\bar{\mu}_k^* \geq \bar{\mu}_k$

$$0 \leq \bar{\mu}_k^* - \bar{\mu}_k = I_0 \sum_i B_{ki} \exp \left(- \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} \theta_l^A \right) (1 - \exp \left(- \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} (\theta_{q,l}^{(m)} - \theta_l^A) \right)) \quad (66)$$

35

$$\leq I_0 \sum_i B_{ki} \exp \left(- \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} \theta_l^A \right) \left| \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} (\theta_{q,l}^{(m)} - \theta_l^A) \right| \quad (67)$$

y para $\bar{\mu}_k^* < \bar{\mu}_k$

$$0 \leq \bar{\mu}_k - \bar{\mu}_k^* = I_0 \sum_i B_{ki} \exp \left(- \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} \theta_{q,l}^{(m)} \right) (1 - \exp \left(- \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} (\theta_l^A - \theta_{q,l}^{(m)}) \right)) \quad (68)$$

$$\leq I_0 \sum_i B_{ki} \exp \left(- \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} \theta_{q,l}^{(m)} \right) \left| \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} (\theta_l^A - \theta_{q,l}^{(m)}) \right|, \quad (69)$$

ambos se derivan de la relación $1 - \exp(-x) \leq x$ por todo x . Obsérvese que la parte dentro de las barras del módulo se estimará por una constante inferior a y y las partes restantes en Eqs. (67) y (69) son simplemente igual a $\bar{\mu}_k^* - r$ y $\bar{\mu}_k - r$, respectivamente.

En el último caso, por otro lado, uno presenta

$$|\bar{\mu}_k^* - \bar{\mu}_k| = \left| \sum_{il} B_{ki} T_{il} (\theta_l^B - \theta_{q,l}^{(m)}) \right|. \quad (70)$$

En ambos casos, uno necesita limitar una expresión de la forma

$$\left| \sum_{jl} A_{ij} T_{jl} (\theta_l^A - \theta_{q,l}^{(m)}) \right| \leq \sum_l \left| \sum_j A_{ij} T_{jl} \right| |\theta_l^A - \theta_{q,l}^{(m)}| \leq \max_{rs} |(AT)_{rs}| \sum_l |\theta_l^A - \theta_{q,l}^{(m)}|, \quad (71)$$

con la matriz B en place de A y θ_l^B en lugar de θ_l^A para el caso plano. En esta fase resulta claro que la incoherencia

$$J_A = \max_{rs} |(AT)_{rs}| \quad \text{resp.} \quad (72)$$

$$J_B = \max_{rs} |(BT)_{rs}| \quad (73)$$

entre la matriz de sistema A (respág. B) y la base de dispersión T introduce el problema.

Limitar el término que permanece $\sum_l |\theta_l^{A/B} - \theta_{q,l}^{(m)}|$ es fácil, debido a la propiedad de compresibilidad y al hecho de que $\underline{\theta}^{(m)}$ es el mejor término m de aproximación a $\underline{\theta}^*$. El límite se da por

$$\sum_l |\theta_l^{A/B} - \theta_{q,l}^{(m)}| \leq \sum_l (|\theta_l^{A/B} - \theta_l^{(m)}| + |\theta_l^{(m)} - \theta_{q,l}^{(m)}|) \quad (74)$$

$$\leq \frac{\sqrt{v_{A/B}} S}{\alpha - \frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{2D}{v_{A/B}^{p-3/2}}. \quad (75)$$

Puesto que es exponencialmente pequeño, el segundo término en el lado de mano derecha es irrelevante y se omitirá a continuación.

Con esto resulta, es finalmente posible limitar el exceso de riesgo

$$r(T\underline{\theta}_q^{(m)}, T\underline{\theta}^A) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \max \left(1, \frac{\bar{\mu}_k^*}{\mu_k} \right) \max (\bar{\mu}_k - r, \bar{\mu}_k^* - r) \frac{J_A \sqrt{v_A} S}{\alpha - \frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}-\alpha} \quad (76)$$

a través de la obtención de imágenes tridimensionales y

$$r(T_{\underline{\theta}_q}^{(m)}, T_{\underline{\theta}^B}) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \max \left(1, \frac{\bar{\mu}_k}{\mu_k} \right) \frac{J_B \sqrt{v_B} S}{\alpha - \frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}-\alpha} \quad (77)$$

a través del caso plano. Esto puede además limitarse por

$$r(T_{\underline{\theta}_q}^{(m)}, T_{\underline{\theta}^{A/B}}) \leq A_{\max}^{\beta_{A/B}} \frac{J_{A/B} \sqrt{v_{A/B}} S}{\alpha - \frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}-\alpha} \quad (78)$$

5

con $\square_A := 3$ y $\square_B := 2$. Combinada,

$$Er(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq C_1 \left(A_{\max}^{\beta_{A/B}} \frac{J_{A/B} \sqrt{v_{A/B}} S}{\alpha - \frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{c(\underline{\theta}^{(m)}) \log 2 + 4}{k\delta} \right). \quad (79)$$

10

Estos límites de error son mínimos cuando

$$m = \left(\frac{(1+p) \log v_{A/B} \log 2}{k\delta A_{\max}^{\beta_{A/B}} J_{A/B} \sqrt{v_{A/B}} S} \right)^{\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}}. \quad (80)$$

15 Que inserta esto en ec. (79) uno obtiene

$$Er(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq C_1 C_2^{A/B} \left(\frac{(J_{A/B} \sqrt{v_{A/B}})^{\frac{1}{\alpha-\frac{1}{2}}} \log v_{A/B}}{k} \right)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}} \quad (81)$$

con

20

$$C_2^{A/B} = \frac{2\alpha+1}{2\alpha-1} (A_{\max}^{\beta_{A/B}} S)^{\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}} \left(\frac{(1+p) \log 2}{\delta} \right)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}} + \frac{4}{\delta}. \quad (82)$$

Inigualdad (81) con los factores $C_2^{A/B}$ desde la ec. (82) continúa si uno asume que $(J_{A/B} \sqrt{v_{A/B}})^{\frac{1}{\alpha-\frac{1}{2}}} \log v_{A/B} \geq 1$.

$$0 < \delta < \frac{2}{C+2h} = O\left(\frac{1}{A_{\max} \log A_{\max}}\right).$$

25 Recordemos que uno puede elegir cualquiera δ con el fin de mantener la constante C_1 cercana a 1, δ no debería ser elegido también cercano al límite superior. Por ejemplo, la elección

$$\delta = \frac{1}{4} \frac{2}{C+2h} \quad (83)$$

30 es sensata puesto que esto implica $1 < C_1 < \frac{5}{3}$.

Cuando el objeto $\underline{f}^{A/B}$ es verdaderamente disperso, es decir sólo m coeficientes $\theta_i^{A/B}$ no son nulos, el término $|\theta^{(m)} - \theta^{A/B}| = 0$, por lo que el único término relevante es el término de penalización. Uno después obtiene el resultado

35

$$Er(\underline{f}_{\min}, \underline{f}^{A/B}) \leq C_1 ((1+p) \log 2 + 4) \frac{1}{\delta} \frac{m \log v_{A/B}}{k}. \quad (84)$$

3.4 Sumario

La consecuencia importante de la ec. (81) se puede resumir para el error relativo de la reconstrucción \hat{f}_{min} ,

$$E \frac{r(\hat{f}_{min}, f^{A/B})}{I_0} \leq \text{const.} \times \frac{1}{I_0} \left(\frac{(J_{A/B} \sqrt{v_{A/B}})^{\frac{1}{\alpha-1}} \log v_{A/B}}{k} \right)^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}}$$

5 Esto significa que uno puede establecer un límite aceptable para el error relativo y ajustar la dosis (es decir, I_0) y el número de pixeles medido, k , para obtener por debajo de este límite, o uno puede elegir I_0 y k primero y calcular la fiabilidad posteriormente. La constante aparición en esta ecuación depende sólo en $A_{m\acute{a}x}$, capaz de la dosis máxima del dispositivo, y las propiedades de compresibilidad del objeto, concretamente el exponente α . La situación óptima es cuando $J_{A/B}$, la incoherencia entre la matriz de sistema y la base de dispersión T , es mínima, es decir de orden $v_{A/B}^{-1/2}$. Sin embargo, esto no puede garantizarse puesto que la matriz de sistema se fija y la base de dispersión puede sólo variarse a una cierta proporción (de manera que el objeto permanece comprimible en esta base). Pero siempre que $J \sim v_{A/B}^{-\gamma}$ con alguna proporción $\gamma > 1-\alpha$, la expresión en corchetes todavía puede ser pequeña aunque $k \ll v_{A/B}$.

15 3.5 Momentos centrales de la distribución de Poisson

Según [6] y referencias en ella, los momentos centrales de la distribución de Poisson $M_n(\mu)$ obedecen a la siguiente relación de recursión:

$$M_n(\mu) = \mu(n-1)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{M_i(\mu)}{i!(n-1-i)!}, \quad (85)$$

Para demostrar que para todos los n y $\mu \geq 0$, $M_n(\mu) \leq n!(\max(1, \mu))^{n/2}$, uno puede empezar mostrando que esto es el caso para $n = 0, 1, 2$:

$$M_0(\mu) = 1 \leq (\max(1, \mu))^0 = 1 \quad (86)$$

$$M_1(\mu) = \mu \leq (\max(1, \mu))^{1/2} \quad (87)$$

$$M_2(\mu) = \mu^2 \leq 2(\max(1, \mu))^1. \quad (88)$$

Proceder por inducción y asumiendo que $M_i(\mu) \leq i!(\max(1, \mu))^{i/2}$ sostiene para todo $0 \leq i < n$ rinde

$$M_n(\mu) = \mu(n-1)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{M_i(\mu)}{i!(n-1-i)!} \quad (89)$$

$$\leq \mu(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{i!(n-1-i)!} i!(\max(1, \mu))^{i/2} \quad (90)$$

$$\leq \mu(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-1-i)!} (\max(1, \mu))^{(n-2)/2} \quad (91)$$

$$\leq \mu(n-1)^2 (n-2)! (\max(1, \mu))^{(n-2)/2} \quad (92)$$

$$\leq n!(\max(1, \mu))^{n/2}, \quad (93)$$

lo que concluye la prueba.

4. Resultados experimentales

La figura 4 muestra imágenes ejemplares que ilustran ventajas obtenidas con la invención. La figura 4A muestra una medida de rayos X original de un tórax objeto de prueba con una dosis baja a 80kV y 8mA de corriente

- fuente dando como resultado un nivel de ruido alto. La figura 4C muestra una medida de rayos X original que corresponde al tórax objeto de prueba con a dosis alta at 80kV y 25,6mA dando como resultado un nivel de ruido bajo. Si según la figura 4B una reconstrucción de imágenes se aplica a la imagen de ruido alto original de la figura 4A que utiliza la segunda realización de la invención y que se centra principalmente en la eliminación de ruido, la calidad del resultado es comparable a la dosis alta en la figura 4C. Además, con una reconstrucción de la figura 4C que utiliza la invención, centrándose principalmente en la eliminación de la función de respuesta de detector, el nivel de detalle se mejora grandemente sin aumentar el nivel de ruido.
- 5
- 10 Las características de la invención divulgada en la descripción anterior, los dibujos y las reivindicaciones pueden ser significativas tanto individualmente como también en combinación para la realización de la invención en sus diversas realizaciones.

REIVINDICACIONES

1. Método de reconstrucción de imágenes para reconstruir una imagen \underline{f}^{min} que representa una región de examen dentro de un objeto (1), que comprende las etapas siguientes:

- proporcionar unos datos de detector (y_i) que comprenden unos valores aleatorios de Poisson a partir de la obtención de imágenes por TC de rayos X del objeto (1) utilizando una fuente (10) de rayos X y un dispositivo detector (20), siendo dichos datos de detector (y_i) medidos en una i -ésima posición de entre una pluralidad de posiciones de píxel diferentes del dispositivo detector (20) en relación con el objeto (1), y
- reconstruir la imagen \underline{f}^{min} basándose en los datos de detector (y_i), en el que la imagen \underline{f}^{min} es una reconstrucción volumétrica del objeto (1), incluyendo dicha etapa de reconstrucción un procedimiento de minimización de una expresión de función $F(\underline{f})$

$$F(\underline{f}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i) + a \|T^{-1} \underline{f}\|_p$$

en el que

\underline{f} es una imagen de prueba actual utilizada para minimizar la expresión de función $F(\underline{f})$,

$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i)$ es una expresión de función de riesgo de máxima verosimilitud para las estadísticas de Poisson, siendo dichos parámetros μ_i proyecciones de transmisión de la imagen de prueba \underline{f} , siendo dichas proyecciones calculadas según la ley de Beer-Lambert en la i -ésima posición de píxel en relación con la fuente (10) de rayos X,

$\|T^{-1} \underline{f}\|_p$ es una expresión de función de aplicación de dispersión que incluye la norma l_p de vector $T^{-1} \underline{f}$ con $0 \leq p < 2$, siendo dicho vector $T^{-1} \underline{f}$ una representación de dispersión o compresión de \underline{f} en una base (bi-)ortogonal T , y

a es un factor de calibración, en el que

- la imagen \underline{f}^{min} representa el mínimo global de la expresión de función $F(\underline{f})$, y
- los parámetros μ_i son

$$\mu_i = \sum_{j'} B'_{i'j'} I_0 \exp(-\sum_j A_{ij} f_j) + r$$

en el que $B'_{i'j'}$ es una matriz que representa una función de respuesta del dispositivo detector (20) que asigna una posición espacial i' -ésima sobre la superficie de detector a los datos de detector (y_i) i -ésimos,

I_0 es una intensidad del haz de rayos X sin atenuar,

A_{ij} es una matriz de sistema predeterminada que asigna un vóxel j -ésimo del objeto (1) a la posición espacial i' -ésima sobre la superficie de detector, y

r es un parámetro de recuento de fondo del dispositivo detector.

2. Método de reconstrucción de imágenes para reconstruir una imagen \underline{f}^{min} que representa una región de examen dentro de un objeto (1), que comprende las etapas siguientes:

- proporcionar unos datos de detector (y_i) que comprenden unos valores aleatorios de Poisson a partir de una obtención de imágenes por rayos X plana del objeto (1) utilizando una fuente (10) de rayos X y un dispositivo detector (20), siendo dichos datos de detector (y_i) medidos en una i -ésima posición de entre una pluralidad de posiciones de píxel diferentes del dispositivo detector (20) en relación con el objeto (1), y

- reconstruir la imagen \underline{f}^{min} basándose en los datos de detector (y_i), en el que la imagen \underline{f}^{min} es una reconstrucción plana de una imagen de atenuación de rayos X del objeto (1), incluyendo dicha etapa de reconstrucción un procedimiento de minimización de una expresión de función $F(\underline{f})$

$$F(\underline{f}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i) + a \|T^{-1} \underline{f}\|_p$$

en el que

\underline{f} es una imagen de prueba actual utilizada para minimizar la expresión de función $F(\underline{f})$,

$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i)$ es una expresión de función de riesgo de máxima verosimilitud para las estadísticas de Poisson, siendo dichos parámetros μ_i proyecciones de transmisión de la imagen de prueba \underline{f} , calculándose dichas proyecciones según la ley de Beer-Lambert en la i -ésima posición de píxel en relación con la fuente (10) de rayos X,

$\|T^{-1} \underline{f}\|_p$ es una expresión de función de aplicación de dispersión que incluye la norma l_p de vector $T^{-1} \underline{f}$ con $0 \leq p < 2$, siendo dicho vector $T^{-1} \underline{f}$ una representación de dispersión o compresión de \underline{f} en una base (bi-)ortogonal T , y

a es un factor de calibración, en el que

- la imagen \underline{f}^{min} representa el mínimo global de la expresión de función $F(\underline{f})$, y
- la imagen de prueba $f_{i'}$ se proporciona en términos de un objeto f_j^A de prueba tridimensional como

$$f_{i'} = I_0 \exp\left(-\sum_j A_{i'j} f_j^A\right),$$

A_{ij} es una matriz de sistema predeterminada que asigna un vóxel j -ésimo del objeto de prueba a la posición espacial i -ésima sobre la superficie de detector, y

- los parámetros μ_i son

$$\mu_i = \sum_{i'} B'_{i'i} f_{i'} + r,$$

en el que

$B'_{i'i}$ es una matriz que representa una función de respuesta del dispositivo detector que asigna una posición espacial i' -ésima sobre la superficie de detector a los datos de detector (y_i) i -ésimos, y

r es un parámetro de recuento de fondo del dispositivo detector.

3. Método de reconstrucción de imágenes según la reivindicación 1 o 2, en el que

- la expresión de función $F(\underline{f})$ incluye adicionalmente una función de regularización aditiva $R(\underline{f})$ de supresión de artefactos:

$$F(\underline{f}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\mu_i - y_i \log \mu_i) + a \|T^{-1} \underline{f}\|_p + R(\underline{f})$$

4. Método de reconstrucción de imágenes según una de las reivindicaciones anteriores, en el que

- la matriz de sistema A_{ij} y/o la función de respuesta $B'_{i'i}$ son ajustadas dependiendo de los datos de referencia del sistema de medición o son adquiridas utilizando una medida de calibración.

5. Método de reconstrucción de imágenes según una de las reivindicaciones anteriores, en el que la base (bi-)ortogonal T es
- 5
- una base de ondículas con portador compacto, o
 - una base adaptada dependiendo de las propiedades del objeto del que van a obtenerse imágenes.
6. Método de reconstrucción de imágenes según una de las reivindicaciones anteriores, en el que
- 10
- los datos de detector (y_i) se proporcionan por medio de un canal de comunicación de datos, desde un almacenamiento de datos o directamente por el dispositivo detector.
7. Método de reconstrucción de imágenes según una de las reivindicaciones anteriores, que comprende por lo menos una de las etapas adicionales siguientes:
- 15
- almacenar, grabar, visualizar y procesar adicionalmente la imagen f^{min} .
8. Método de obtención de imágenes para crear una imagen f^{min} de un objeto (1), que comprende las etapas siguientes:
- 20
- recoger unos datos de detector (y_i) con un dispositivo detector (20) de un dispositivo de obtención de imágenes (100), y
 - someter los datos de detector (y_i) al método de reconstrucción de imágenes según una de las
- 25
- reivindicaciones anteriores.
9. Dispositivo de obtención de imágenes (100) para obtener imágenes de una región de examen en un objeto (1), comprendiendo el dispositivo de obtención de imágenes:
- 30
- una fuente (10) de rayos X dispuesta para irradiar el objeto con rayos X,
 - un dispositivo detector (20) para medir unos datos de detector (y_i) que comprenden unos valores aleatorios de Poisson medidos en una pluralidad de posiciones de píxel diferentes del dispositivo detector (20) en relación con el objeto (1), y
- 35
- un dispositivo de reconstrucción (30) para reconstruir una imagen f^{min} del objeto (1), estando dicho dispositivo de reconstrucción (30) adaptado para someter los datos de detector (y_i) a un método de reconstrucción de imágenes según una de las reivindicaciones 1 a 7.
- 40
10. Programa informático que reside en un medio legible por ordenador, con un código de programa para llevar a cabo el método de reconstrucción de imágenes según una de las reivindicaciones 1 a 7.
11. Aparato que comprende un medio de almacenamiento legible por ordenador que contiene unas instrucciones de programa para llevar a cabo el método de reconstrucción de imágenes según una de las reivindicaciones 1 a 7.
- 45

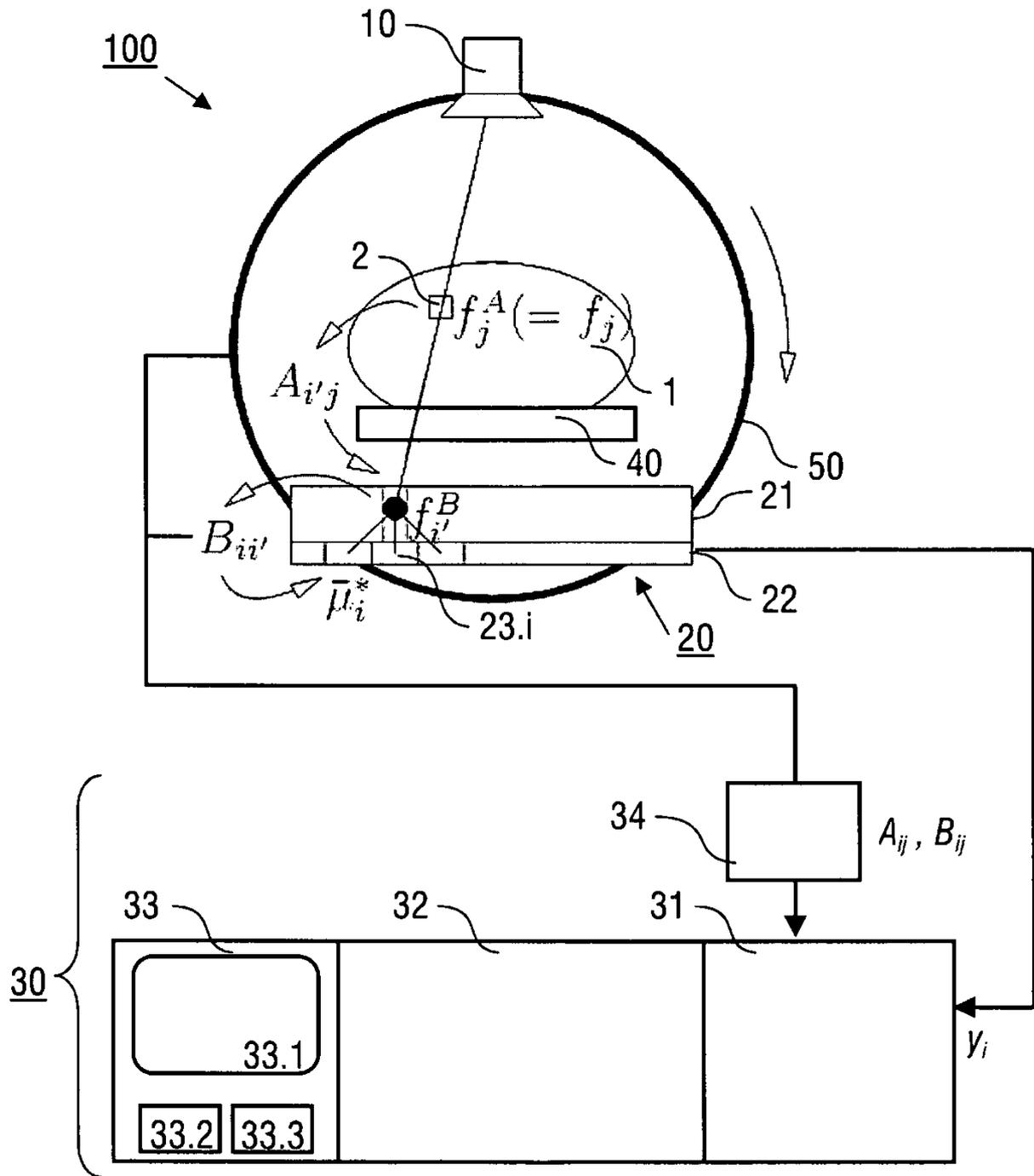


FIG. 1

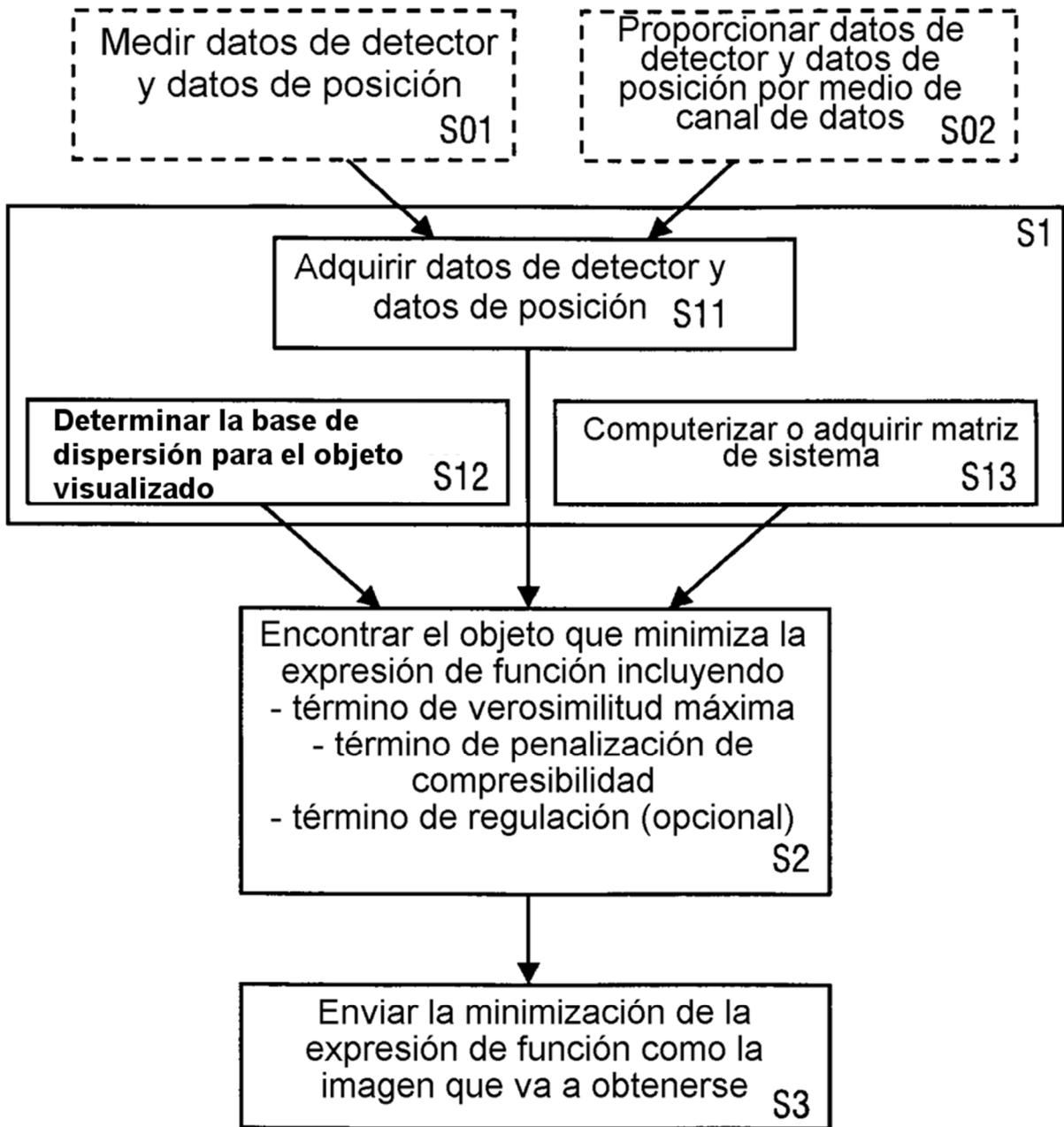


FIG. 3

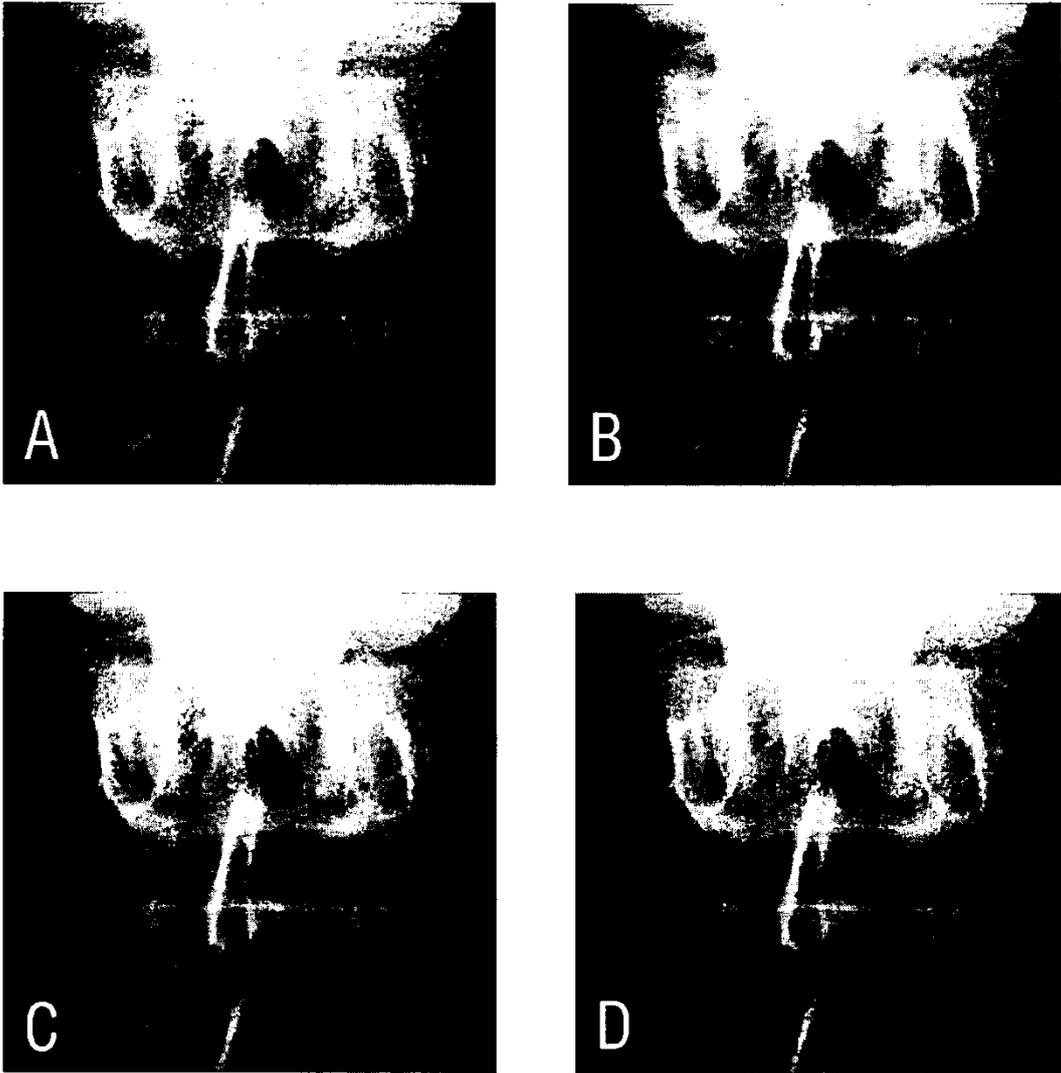


FIG. 4